Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 gennaio 2015– $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di integrale improprio per funzioni continue in un intervallo limitato $(a, b]$ ed enunciare il criterio del confronto asintotico per tale integrale. Provare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ converge se e solo se $p < 1$.

(2) Enunciare e dimostrare il primo Criterio di convessità per funzioni derivabili.

(3) Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$.

(4) Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi divergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) Per provare che $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$ dobbiamo provare che per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n + b_n > M \quad \forall\, n \geq n_0$$

Fissato allora $M > 0$, poichè $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_1$ risulta $a - 1 < a_n < a + 1$, inoltre poichè $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ avremo che esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che $b_n > M - a + 1$. Scelto allora $n_0 = \max\{n_1; n_2\}$ avremo che per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$a_n + b_n > (a - 1) + (M - a + 1) = M$$

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio, considerata la successione $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ risulta divergente ma anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Osserviamo innanzitutto che se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste oppure esiste ma non è nullo allora anche $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n}$ non esiste oppure esiste ma non è nullo. Dalla condizione necessaria alla convergenza di una serie otteniamo quindi che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ non converge, e dunque che diverge (essendo infatti i termini della serie positivi, la serie risulterà convergente o divergente). Se invece $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, poichè $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, avremo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = +\infty$$

e poichè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ipotesi diverge, dal criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ risulterà divergente.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio, considerata la successione $a_n = \frac{1}{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ risulta divergente mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (per il criterio di Leibniz).

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 gennaio 2015 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di integrale improprio per funzioni continue in un intervallo illimitato $[a, +\infty)$ ed enunciare il criterio del confronto asintotico per tale integrale. Provare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se e solo se $p > 1$.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di monotonia per funzioni derivabili.

(3) Dimostrare che se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = -\infty$.

(4) Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) Per provare che $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = -\infty$ dobbiamo provare che per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in I\!N$ tale che

$$a_n + b_n < -M \quad \forall\, n \geq n_0$$

Fissato allora $M > 0$, poichè $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \in I\!R$ esiste $n_1 \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq n_1$ risulta $b - 1 < b_n < b + 1$, inoltre poichè $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ avremo che esiste $n_2 \in I\!N$ tale che $a_n < -M - b - 1$. Scelto allora $n_0 = \max\{n_1; n_2\}$ avremo che per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$a_n + b_n < (-M - b - 1) + (b + 1) = -M$$

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio, considerata la successione $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ risulta convergente ed anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Osserviamo innanzitutto che essendo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente dalla condizione necessaria alla convergenza risulta che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Abbiamo allora che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

e poichè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ipotesi converge, dal criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ risulterà convergente.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, poichè $a_n > 0$ si ha che $|(-1)^n a_n| = a_n$ e dunque la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

per ipotesi converge. Dal Teorema sulla convergenza assoluta ne deduciamo che anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 7 febbraio 2015– $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione e la caratterizzazione di estremo superiore finito ed infinito di un sottoinsieme non vuoto di numeri reali.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di integrabilità.

(3) Utilizzando la definizione ed i limiti notevoli, provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la derivata di $f(x) = \cos x$ è $f'(x) = -\sin x$.

(4) Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni definite e positive nell'intervallo $(0, 1]$ tali che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ e $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0^+$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in (0, \delta)$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $\lim_{x\to 0^+} f(x) + g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$ $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\lim_{x\to 0^+} f(x) - g(x) = 0$. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 7 febbraio 2015 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann. Fornire un esempio di funzione limitata non integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza dell'estremo superiore.

(3) Utilizzando la definizione ed i limiti notevoli, provare che per ogni $x > 0$ la derivata di $f(x) = \log x$ è $f'(x) = \frac{1}{x}$.

(4) Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni definite e positive nell'intervallo $[1, +\infty)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Esiste $N > 1$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x > N$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ $\boxed{\text{Vero}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 24 febbraio 2015– $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di funzione continua in un punto e la classificazione dei punti di discontinuità, illustrando per ciascun caso un esempio.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Fornire la regola di derivazione della funzione inversa ed utilizzarla per provare che la derivata di $f(x) = \arctan x$ è $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva nell'intervallo $(0, 1]$ tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ è convergente. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale

Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 24 febbraio 2015 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile e l'interpretazione geometrica.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri.

(3) Enunciare il Principio di induzione ed utilizzarlo per provare che per ogni $x \geq -1$ e $n \in I\!N$ risulta $(1+x)^n \geq 1+nx$.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva nell'intervallo $[1,+\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente. $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,dx$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9 giugno 2015

(1) Fornire la definizione di somma parziale di una serie, di serie convergente e divergente. Provare che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge se e solo se $|x| < 1$.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale.

(3) Fornire la definizione di derivata. Utilizzando i limiti notevoli provare che la derivata di $f(x) = x^\alpha$ è $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ per ogni $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) Sia $f(x)$ funzione monotona in $[a, b]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. per ogni $x_0 \in (a, b)$ esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. esiste finito $\lim_{x \to a^+} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 8 settembre 2015

(1) Fornire la definizione di integrale indefinito. Fornire le regole di integrazione per parti e per sostituzione per tale integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di Leibniz di convergenza delle serie a termini di segno alterno.

(3) Fornire la regola di derivazione della funzione inversa ed utilizzarla per provare che la derivata di $f(x) = \operatorname{settcosh} x$ è $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua nell'intervallo aperto $I = (a, b)$. Denotata con $J = f(I)$ l'immagine di I, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa

A. J contiene almeno due elementi. $\boxed{\text{Falso}}$

B. J è insieme limitato. $\boxed{\text{Falso}}$

C. se $\alpha, \beta \in J$ e $\alpha < \beta$ allora $(\alpha, \beta) \subseteq J$. $\boxed{\text{Vero}}$