Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 17 gennaio 2015

(1) La successione $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\alpha^n}$ con $\alpha \in I\!R$ risulta convergente

[a] per nessun $\alpha \in I\!R$
[b] solo se $\alpha \geq e$
[c] solo se $\alpha < 0$
[d] nessuna delle precedenti

(2) La funzione $f_\alpha(x) = (x-\alpha)e^{-|x|}$ per qualche $\alpha > 0$

[a] non ammette asintoti
[b] non ammette punti di massimo
[c] è derivabile nel suo dominio
[d] nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f(x) = (1+x)\log(1-x) + x\sqrt{1+\alpha x}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

[a] 2 per ogni $\alpha \in I\!R$
[b] maggiore di 3 per qualche $\alpha \in I\!R$
[c] 3 per qualche $\alpha \in I\!R$
[d] nessuna delle precedenti

(4) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$ vale

[a] $\frac{1}{2}\log\frac{3}{8}$
[b] $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}$
[c] $2\log 3$
[d] nessuna delle precedenti

(5) La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)^n}{2^{n^2}} x^n$ ha insieme di convergenza

[a] $I\!R$
[b] $\{0\}$
[c] $\left(-\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}\right)$
[d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ e che, dallo sviluppo di Taylor di ordine 2 del logaritmo, per $n \to 0$ risulta

$$n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n - \frac{1}{2} + o(1)$$

otteniamo che

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\alpha^n} = \frac{e^n e^{-\frac{1}{2}+o(1)}}{\alpha^n} = \left(\frac{e}{\alpha}\right)^n e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < e \\ 0 & \text{se } \alpha > e \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & \text{se } \alpha = e \end{cases}$$

e dunque, dal creiterio del rapporto, che la successione risulta convergente se e solo se $\alpha \geq e$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Per ogni $\alpha > 0$ la funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

e quindi per ogni $\alpha > 0$, $x = 0$ risulta asintoto orizzontale per $f_\alpha(x)$ per $x \to \pm\infty$, dunque $\boxed{\text{a}}$ è falsa.
Per ogni $\alpha > 0$ la funzione risulta derivabile in ogni $x \neq 0$, con

$$f'_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-x}(1+\alpha-x) & \text{se } x > 0 \\ e^{x}(1-\alpha+x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

mentre per ogni $\alpha > 0$ non risulta derivabile in $x = 0$ essendo $\lim_{x\to 0^+} f'_\alpha(x) = 1+\alpha \neq \lim_{x\to 0^-} f'_\alpha(x) = 1-\alpha$ ($x = 0$ è punto angoloso), dunque $\boxed{\text{c}}$ è falsa.

Inoltre, se $\alpha \geq 1$ risulta $f'_\alpha(x) \geq 0$ solo se $x \in (0, \alpha+1)$ e dal criterio di monotonia possiamo concludere che la funzione risulta (strettamente) crescente in $[0, \alpha+1]$ e (strettamente) decrescente in $(-\infty, 0]$ ed in $[\alpha+1, +\infty)$. I punti $x = 0$ e $x = \alpha+1$ risultano allora rispettivamente punti di minimo e di massimo relativo con $f_\alpha(0) = -\alpha$ e $f_\alpha(\alpha+1) = e^{-\alpha-1}$.
Se invece $0 < \alpha < 1$ allora risulta $f'_\alpha(x) \geq 0$ solo se $x \in (\alpha-1, \alpha+1)$ e dal criterio di monotonia possiamo concludere che la funzione risulta (strettamente) crescente in $[\alpha-1, \alpha+1]$ e (strettamente) decrescente in $(-\infty, \alpha-1]$ ed in $[\alpha+1, +\infty)$. I punti $x = \alpha-1$ e $x = \alpha+1$

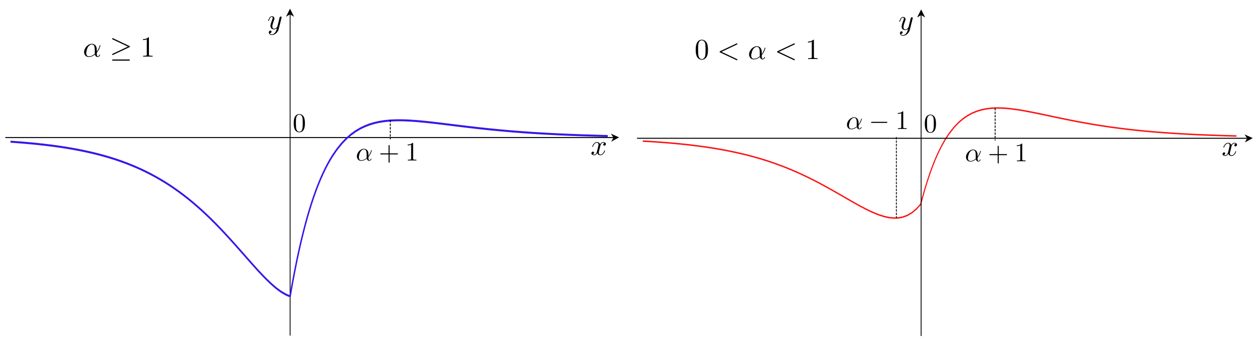


Grafico di $f_\alpha(x) = (x-\alpha)e^{-|x|}$

risultano allora rispettivamente punti di minimo e di massimo relativo con $f_\alpha(\alpha-1) = -e^{\alpha-1}$ e $f_\alpha(\alpha+1) = e^{-\alpha-1}$.
Dunque per ogni $\alpha > 0$ la funzione ammette un punto di massimo relativo e quindi anche $\boxed{\text{b}}$ è falsa.

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (1+x)(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + x(1 + \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{8}x^2 + o(x^2)) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x^3}{2} + x + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^3 + o(x^3)) \\ &= (\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2})x^2 - (\frac{5}{6} + \frac{\alpha^2}{8})x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha \neq 3$ allora $f_\alpha(x) = (\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2})x^2 + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2 mentre se $\alpha = 3$ allora $f_\alpha(x) = -\frac{47}{24}x^3 + o(x^3)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 3.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osservato che

$$\frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+2},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)}\,dx &= -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx \\ &= -\log|x+1| + \tfrac{1}{2}\log(x^2+2) + c \end{aligned}$$

e dunque

$$\int_0^1 \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)}\,dx = \left[-\log|x+1| + \tfrac{1}{2}\log(x^2+2)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(\log 3 - \log 8) = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{3}{8}$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Posto $a_n = \frac{n!(2n)^n}{2^{n^2}}$, dalla gerachia degli infiniti, per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!(2n+2)^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}\frac{2^{n^2}}{n!(2n)^n} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e\frac{n^2}{4^n} \to 0$$

e dunque, dal metodo del rapporto di D'Alembert, ne segue che la serie ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$. Dalle proprietà del raggio di convergenza otteniamo allora che la serie converge in ogni $x \in I\!R$ ovvero che il suo insieme di convergenza è $I\!R$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12 febbraio 2015

(1) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)-e^{\alpha x}\sinh x}{x} & \text{se } x>0 \\ \sqrt{1+x^2}-\beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

[a] è continua per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
[b] è derivabile per $\alpha = -\frac{1}{2}$ e ogni $\beta \in I\!R$
[c] è derivabile solo per $\alpha = -\frac{3}{2}$ e $\beta = 1$
[d] nessuna delle precedenti

(2)* L'equazione $xe^{\frac{|x-1|}{x}} = \alpha$

[a] non ammette soluzioni se $0 \leq \alpha < 1$
[b] ammette soluzione per ogni $\alpha \in I\!R$
[c] ammette due soluzioni per ogni $\alpha \geq 1$
[d] nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f_\alpha(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2} + (1-x)\sin(\alpha x)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

[a] 2 per ogni $\alpha \in I\!R$
[b] maggiore di 3 per qualche $\alpha \in I\!R$
[c] 3 per qualche $\alpha \in I\!R$
[d] nessuna delle precedenti

(4)* L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+x)\,dx$ vale

[a] $\log\sqrt{2}$
[b] $+\infty$
[c] 0
[d] nessuna delle precedenti

(5) La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{1+\frac{2}{3^n}} - \cos\frac{1}{2^n}}$ converge se e solo se

[a] $\alpha < \frac{1}{4}$
[b] $|\alpha| < \frac{1}{2}$
[c] $|\alpha| < \frac{1}{3}$
[d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che

$$\log(1+x) - e^{\alpha x}\sinh x = x - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2) - (1+\alpha x + o(x))(x + o(x^2)) = -(\alpha + \tfrac{1}{2})x^2 + o(x^2)$$

otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - e^{\alpha x}\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -(\alpha+\tfrac{1}{2})x + o(x) = 0$$

ed essendo $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{1+x^2} - \beta = 1 - \beta = f(0)$, otteniamo che la funzione risulta continua solo per $\beta = 1$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Riguardo la derivabilità, per $\beta = 1$, dal precedente sviluppo abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - e^{\alpha x}\sinh x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} -(\alpha+\tfrac{1}{2}) + o(1) = -(\alpha+\tfrac{1}{2})$$

e quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = -(\alpha+\frac{1}{2})$. Essendo invece $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ per ogni $x < 0$ e

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$$

si ha che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$. Ne concludiamo allora che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\beta = 1$ e $\alpha = -\frac{1}{2}$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Posto $f(x) = xe^{\frac{|x-1|}{x}}$, determiniamo le soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo che la funzione risulta definita e continua in $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e risulta $f(x) > 0$ per $x > 0$ mentre $f(x) < 0$ per $x < 0$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{|x-1|}{x}} = \pm\infty$$

mentre, ricordando che $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1-x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}e^{-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1-x}{x}} = 0$$

Per ogni $x \in D$ con $x \neq 1$ la funzione risulta derivabile con

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x}}(1 + \frac{1}{x}) & \text{se } x > 1 \\ e^{\frac{1-x}{x}}(1 - \frac{1}{x}) & \text{se } x < 1,\ x \neq 0 \end{cases}$$

(osserviamo che $x = 1$ è punto angoloso essendo $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$).

Poichè risulta $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (0, 1)$, dal criterio di monotonia stretta possiamo concludere che la funzione risulta strettamente crescente in $[1, +\infty)$ ed in $(-\infty, 0)$ mentre risulta strettamente decrescente in $(0, 1]$. Il punto $x = 1$ risulta allora punto di minimo relativo con $f(1) = 1$.

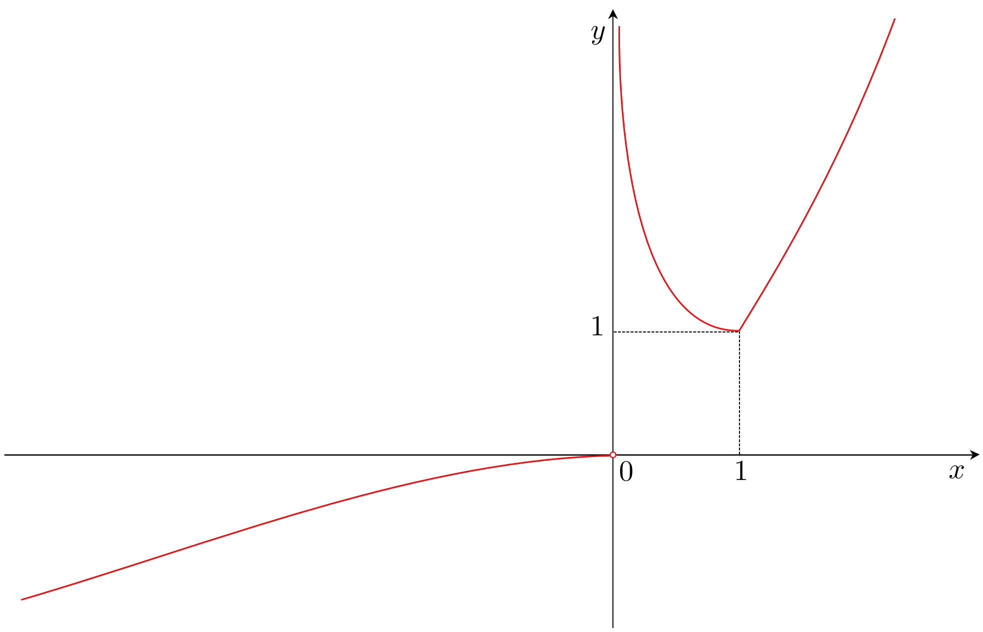


Grafico di $f(x) = xe^{\frac{|x-1|}{x}}$

Dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia stretta, ne deduciamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette un'unica soluzione per $\alpha < 0$ e $\alpha = 1$, due soluzioni per $\alpha > 1$ e nessuna soluzione per $0 \leq \alpha < 1$. La risposta esatta è quindi $\boxed{\text{a}}$.

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= x(1+x)^{-2} + (1-x)\sin(\alpha x) = x(1 - 2x + o(x)) + (1-x)(\alpha x + o(x^2)) \\ &= (\alpha + 1)x - (2 + \alpha)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha \neq -1$ allora $f_\alpha(x) = (\alpha+1)x+o(x)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 1 mentre se $\alpha = -1$ allora $f_\alpha(x) = -x^2 + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int x\log(x+x^2)\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x+x^2) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x+x^2) - \frac{1}{2}\int 2x-1+\frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2\log(x+x^2) - x^2 + x - \log|x+1|) + c\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\log(x+x^2)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x\log(x+x^2)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}(x^2\log(x+x^2) - x^2 + x - \log|x+1|)\right]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\tfrac{1}{2}(-\varepsilon^2\log(\varepsilon+\varepsilon^2) + \varepsilon^2 - \varepsilon + \log|\varepsilon+1|) = 0\end{aligned}$$

in quanto, dal limite notevole $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$ per ogni $\alpha > 0$, risulta $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^2\log(\varepsilon+\varepsilon^2) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^2\log\varepsilon + \varepsilon^2\log(1+\varepsilon) = 0$.

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Osserviamo innanzitutto che per $n \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{1+\frac{2}{3^n}} - \cos\frac{1}{2^n} = \frac{1}{3^n} + o(\frac{1}{3^n}) + \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} + o(\frac{1}{4^n}) = \frac{1}{3^n} + o(\frac{1}{3^n}) \sim \frac{1}{3^n}$$

essendo $\frac{1}{4^n} = o(\frac{1}{3^n})$. Posto $a_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{1+\frac{2}{3^n}}-\cos\frac{1}{2^n}}$, risulta allora

$$a_n \sim \frac{\alpha^n}{\frac{1}{3^n}} = (3\alpha)^n, \quad n\to+\infty. \tag{1}$$

Ne segue che $|a_n| \sim (3|\alpha|)^n$ e poichè la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(3|\alpha|)^n$ risulta convergente se e solo se $3|\alpha| < 1$, dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che se $|\alpha| < \frac{1}{3}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ risulta assolutamente convergente e dunque convergente. Sempre da (1), abbiamo che se $\alpha > \frac{1}{3}$ allora $a_n \to +\infty$, se $\alpha = \frac{1}{3}$ allora $a_n \to 1$, mentre se $\alpha \leq -\frac{1}{3}$, la successione (a_n) non ammette limite. In ogni caso, dalla condizione necessaria alla convergenza possiamo concludere che se $|\alpha| \geq \frac{1}{3}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non risulta convergente.
Ne concludiamo che la serie data converge se e solo se $|\alpha| < \frac{1}{3}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 28 febbraio 2015 – $\boxed{\text{A}}$

(1) La successione $a_n = \dfrac{n^{\alpha n} \log n}{(2n)!}$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha \leq 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2)* L'equazione $\alpha x + \log(|x-1| - 1) = 2$ con $\alpha > 0$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ tre soluzioni per ogni $0 < \alpha < e^{-3}$
$\boxed{\text{b}}$ nessuna soluzione per ogni $\alpha > e$
$\boxed{\text{c}}$ una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3)* La funzione $f_\alpha(x) = \log(\cos(x^\alpha)) + \frac{1}{2}\sinh^2 x$, dove $\alpha > 0$, per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2α per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$
$\boxed{\text{b}}$ 4 per qualche $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ 2 per ogni $0 < \alpha < 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} |\cos x| \sin^2 x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 1
$\boxed{\text{b}}$ 0
$\boxed{\text{c}}$ $-\frac{\pi}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}{x \arctan \sqrt{x}} \, dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ solo se $\alpha \neq -\frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}\log(n+1)}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n^{\alpha n}\log n}\\ &= \frac{\log(n+1)}{\log n}\frac{(n+1)^\alpha}{(2n+2)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n} \sim \frac{n^\alpha}{4n^2}e^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2\\ \frac{e^2}{4} & \text{se } \alpha = 2\\ 0 & \text{se } \alpha < 2\end{cases}\end{aligned}$$

e che $e^2 > 4$, dal Criterio del rapporto deduciamo che la successione converge se e solo se $\alpha < 2$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Posto $f_\alpha(x) = \alpha x + \log(|x-1|-1)$, determiniamo le soluzioni dell'equazione $f_\alpha(x) = 2$ al variare di $\alpha > 0$. Abbiamo che la funzione risulta definita e continua in $D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Dalla gerarchia degli infiniti, per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(\alpha + \frac{\log(|x-1|-1)}{x} = \pm\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 2^+} f_\alpha(x) = -\infty$$

Osservato che per ogni $x \in D$ risulta

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x + \log(x-2) & \text{se } x > 2\\ \alpha x + \log(-x) & \text{se } x < 0\end{cases}$$

la funzione risulta derivabile con

$$f'_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha + \frac{1}{x-2} = \frac{\alpha x - 2\alpha + 1}{x-2} & \text{se } x > 2\\ \alpha + \frac{1}{x} = \frac{\alpha x + 1}{x} & \text{se } x < 0\end{cases}$$

Risulta allora $f'_\alpha(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -\frac{1}{\alpha}) \cup (2, +\infty)$ mentre $f'_\alpha(x) < 0$ se $x \in (-\frac{1}{\alpha}, 0)$, dal criterio di monotonia stretta possiamo concludere che la funzione risulta strettamente crescente in $(-\infty, -\frac{1}{\alpha}]$ ed in $(2, +\infty)$ mentre risulta strettamente decrescente in $[-\frac{1}{\alpha}, 0)$. Il punto $x_\alpha = -\frac{1}{\alpha}$ risulta allora punto di massimo relativo con $f_\alpha(x_\alpha) = -1 - \log\alpha$ e che risulta $f_\alpha(x_\alpha) > 2$ se e solo se $\alpha < e^{-3}$.

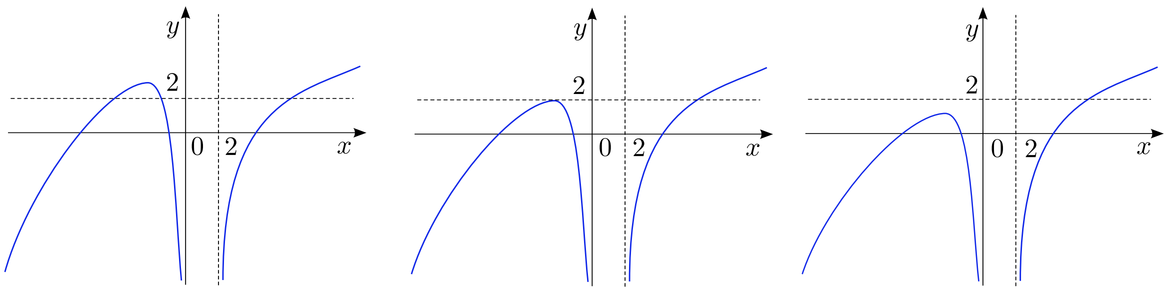


Grafico di $f_\alpha(x) = \alpha x + \log(|x-1|-1)$ per $0 < \alpha < e^{-3}$, $\alpha = e^{-3}$ e $\alpha > e^{-3}$

Dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia stretta avremo allora che l'equazione $f_\alpha(x) = 2$ ammette

- tre soluzioni se $0 < \alpha < e^{-3}$
- due soluzioni se $\alpha = e^{-3}$
- una soluzione se $\alpha > e^{-3}$

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per ogni $\alpha > 0$, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= (\cos(x^\alpha) - 1) - \tfrac{1}{2}(\cos(x^\alpha)-1)^2 + o((\cos(x^\alpha)-1)^2) + \tfrac{1}{2}\sinh^2 x \\
&= -\tfrac{x^{2\alpha}}{2} + \tfrac{x^{4\alpha}}{4!} + o(x^{4\alpha}) - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}))^2 + \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{x^3}{3!} + o(x^3))^2 \\
&= -\tfrac{x^{2\alpha}}{2} + \tfrac{x^{4\alpha}}{4!} + o(x^{4\alpha}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^{4\alpha}}{4} + o(x^{4\alpha})) + \tfrac{1}{2}(x^2 + \tfrac{x^4}{3} + o(x^4)) \\
&= \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^{2\alpha}}{2} + \tfrac{x^4}{6} - \tfrac{x^{4\alpha}}{12} + o(x^4) + o(x^{4\alpha})
\end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha > 1$ allora $x^{2\alpha} = o(x^2)$, $f_\alpha(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2, se $\alpha < 1$ allora $x^2 = o(x^{2\alpha})$, $f_\alpha(x) = -\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2α mentre se $\alpha = 1$ allora $f_\alpha(x) = \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 4.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osservato che

$$\int \cos x \sin^2 x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c,$$

utilizzando la proprietà di additività dell'integrale otteniamo

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} |\cos x| \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x \sin^2 x \, dx$$
$$= \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 1$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Osserviamo innanzitutto che per $x \to 0^+$ si ha

$$e^{\alpha x} - \sqrt{1-x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2) - (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$
$$= (\alpha + \frac{1}{2})x + (\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{8})x^2 + o(x^2)) \sim \begin{cases} (\alpha + \frac{1}{2})x & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

mentre $x \arctan \sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}}$. Abbiamo allora che

$$\frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}{x \arctan \sqrt{x}} \sim \begin{cases} \frac{(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{x} & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e dal Criterio del confronto asintotico ne deduciamo che l'integrale converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 28 febbraio 2015 – $\boxed{\text{B}}$

(1) La successione $a_n = \dfrac{n^{2n}}{3^n (n!)^\alpha}$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha \leq 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2)* L'equazione $\alpha x + \log(|x-2| - 2) = 1$ con $\alpha > 0$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ due soluzioni per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{c}}$ tre soluzioni per ogni $0 < \alpha < e^{-2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3)* La funzione $f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\sinh^2 x - \log(\cosh(x^\alpha))$, dove $\alpha > 0$, per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ 2α per ogni $0 < \alpha < 2$
$\boxed{\text{c}}$ 2 per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) L'integrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| \cos^2 x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 0
$\boxed{\text{b}}$ $-\pi$
$\boxed{\text{c}}$ 1
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\arctan x}{\sqrt{1+\alpha x} - e^{-x}} \, dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ solo se $\alpha \neq -2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risposte*

1. La risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{e^2}{3} n^{2-\alpha} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{e^2}{3} & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Dal criterio del rapporto si ottiene che la successione converge se e solo se $\alpha > 2$.

2. La risposta corretta è $\boxed{\text{c}}$. La funzione $f_\alpha(x) = \alpha x + \log(|x-2|-2)$ è definita in $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ con $\lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 4^+} f_\alpha(x) = -\infty$ per ogni $\alpha > 0$. Risulta inoltre strettamente crescente in $(-\infty, -\frac{1}{\alpha})$ e $(4, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente in $(-\frac{1}{\alpha}, 0)$. Il punto $x_\alpha = -\frac{1}{\alpha}$ è punto di massimo relativo con $f_\alpha(x_\alpha) = -1 - \log\alpha$. Si ha allora che l'equazione $f_\alpha(x) = 1$ ammette una sola soluzione se $f_\alpha(x_\alpha) < 1$ cioè per $\alpha > e^{-2}$, due soluzioni se $f_\alpha(x_\alpha) = 1$ ovvero se $\alpha = e^{-2}$ e tre soluzioni se $f_\alpha(x_\alpha) > 1$, e quindi per $0 < \alpha < e^{-2}$.

3. La risposta corretta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per ogni $\alpha > 0$, per $x \to 0$ risulta

$$f_\alpha(x) = \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^{2\alpha}}{2} + \tfrac{x^4}{6} - \tfrac{x^{4\alpha}}{6} + o(x^4) + o(x^{4\alpha})$$

quindi se $\alpha = 1$ risulta $f_\alpha(x) = o(x^4)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo maggiore di 4.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osservato che $\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$, otteniamo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| \cos^2 x\, dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \cos^2 x\, dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x\, dx = 1$$

5. La risposta corretta è $\boxed{\text{b}}$. L'integrale improprio per $x \to 0^+$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ poichè per $x \to 0^+$ risulta

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{\alpha+2} & \text{se } \alpha \neq -2 \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha = -2 \end{cases}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 28 marzo 2015

(1) La successione $a_n = \dfrac{n^{2n}\alpha^n}{(2n)!}$

$\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha > 2$
$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha \geq \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2)* La funzione $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 3| - 1}$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{b}}$ non ammette punti di minimo relativo
$\boxed{\text{c}}$ non ammette punti di massimo relativo
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt{e^{\sin x}} - \cosh(x^\alpha)$, dove $\alpha > 0$, per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ minore di 1 per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 2 per qualche $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ 1 per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4)* L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $e^\pi - \frac{2}{5}$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{5}(e^\pi - 2)$
$\boxed{\text{c}}$ $2 - e^\pi$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{\log(\cos\sqrt{x}) - \sin(\alpha x)} \, dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ solo se $\alpha \neq -\frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osservato che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}\alpha^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n^{2n}\alpha^n} = \alpha\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \to \frac{\alpha e^2}{4},$$

dal Criterio del rapporto deduciamo che la successione converge se $\alpha < \frac{4}{e^2}$ e diverge se $\alpha > \frac{4}{e^2}$. Essendo $2 > \frac{4}{e^2}$, la successione risulterà divergente per ogni $\alpha > 2$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $D = (-\infty, 2] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [2, +\infty)$. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2-4} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Si ha quindi che $x = 0$ risulta asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e quindi che $\boxed{\text{a}}$ è falsa (la funzione ammette inoltre $y = 2x$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$). Osservato che per ogni $x \in D$ risulta

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2-4} & \text{se } |x| \geq 2 \\ x + \sqrt{2-x} & \text{se } |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

la funzione risulta derivabile per $|x| > 2$ e $|x| < \sqrt{2}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} & \text{se } |x| > 2 \\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} & \text{se } |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

Risulta allora $f'(x) > 0$ se $x \in (-\sqrt{2}, 1) \cup (2, +\infty)$ mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, 2) \cup (1, \sqrt{2})$. Dal criterio di monotonia stretta possiamo concludere che la funzione risulta strettamente crescente in $[-\sqrt{2}, 1]$ ed in $[2, +\infty)$ mentre risulta strettamente decrescente in $(-\infty, -2]$ ed in $[1, \sqrt{2}]$. Il punto $x = 1$ risulta allora punto di massimo relativo con $f(1) = 2$, mentre i punti $x = \pm 2$ e $x = \pm\sqrt{2}$ risultano punti di minimo relativo con $f(\pm 2) = \pm 2$, $f(\pm\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Quindi sia $\boxed{\text{b}}$ che $\boxed{\text{c}}$ risultano false.

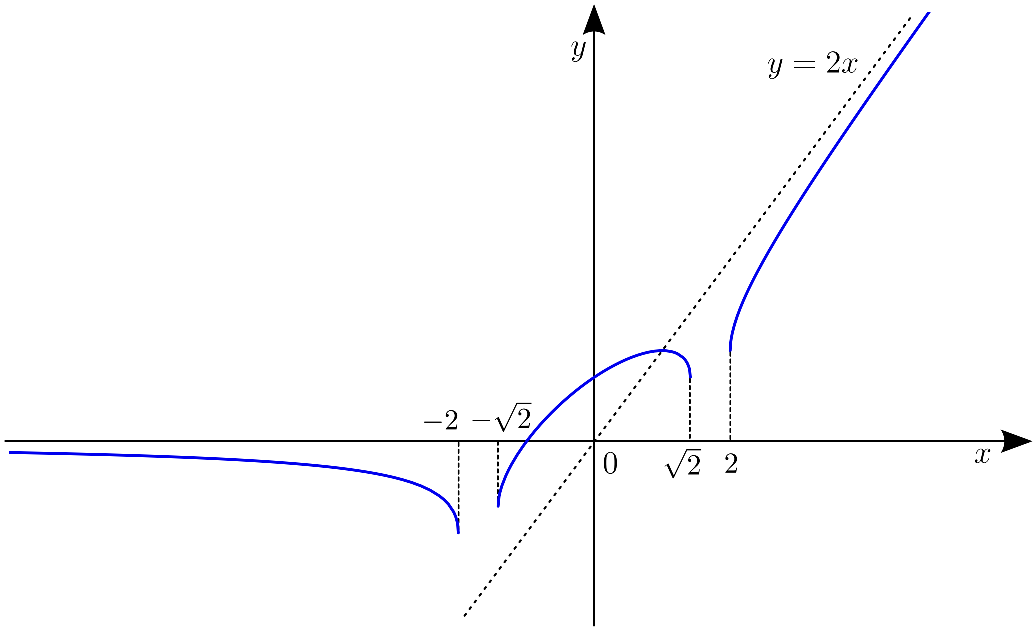


Grafico di $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 3| - 1}$

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, per ogni $\alpha > 0$, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= e^{\frac{1}{2}\sin x} - \cosh(x^\alpha) = 1 + \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{1}{8}\sin^2 x + o(\sin^2 x) - (1 + \tfrac{x^{2\alpha}}{2} + \tfrac{x^{4\alpha}}{4!} + o(x^{4\alpha})) \\ &= \tfrac{x}{2} + o(x^2) + \tfrac{1}{8}(x + o(x))^2 - \tfrac{x^{2\alpha}}{2} - \tfrac{x^{4\alpha}}{24} + o(x^{4\alpha}) \\ &= \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) - \tfrac{x^{2\alpha}}{2} - \tfrac{x^{4\alpha}}{24} + o(x^{4\alpha}) \end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $2\alpha > 1$ allora $x^{2\alpha} = o(x)$, $f_\alpha(x) = \frac{x}{2} + o(x)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo 1, se $2\alpha = 1$ allora $f_\alpha(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{24} + o(x^2) = \frac{x^2}{12} + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo 2 mentre se $2\alpha < 1$ allora $x = o(x^{2\alpha})$, $f_\alpha(x) = -\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$ e la funzione ha ordine di infinitesimo $2\alpha < 1$. Quindi la risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, posto $I = \int e^{2x}\cos x\,dx$, integrando per parti due volte si ottiene

$$I = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx = e^{2x}\sin x - 2(-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x) = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4I$$

da cui

$$I = \int e^{2x}\cos x\,dx = \tfrac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + c$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}\left[e^{2x}(\sin x + 2\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Osserviamo innanzitutto che la funzione integranda $f_\alpha(x) = \frac{\arctan x}{\sin(\alpha x) - \log(\cos\sqrt{x})}$ è continua in $(0, 1]$. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}\sin(\alpha x) - \log(\cos\sqrt{x}) &= \alpha x + o(x^2) - (\cos\sqrt{x} - 1) + \tfrac{1}{2}(\cos\sqrt{x} - 1)^2 + o(\cos\sqrt{x} - 1)^2) \\ &= \alpha x + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{24} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) \sim \begin{cases} (\alpha + \frac{1}{2})x & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{12}x^2 & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

mentre $\arctan x \sim x$. Abbiamo allora che

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{12}{x} & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e dal Criterio del confronto asintotico ne deduciamo che l'integrale converge solo se $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 giugno 2015

(1) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - \cos\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} & \text{se } x > 0 \\ \arctan(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

a è continua per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$ e $\beta \in \mathbb{R}$
b è derivabile se $\alpha = 2\beta$
c è derivabile solo per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$
d nessuna delle precedenti

(2) L'equazione $x^3 + |x^2 - 2| = \alpha$

a non ammette soluzione per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
b ammette due soluzioni se $\alpha < 0$
c ammette un unica soluzione per ogni $\alpha > 0$
d nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f_\alpha(x) = \sin(\alpha x^2) - x^2 e^{2x^2}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

a 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b 4 per qualche $\alpha > 0$
c 6 per qualche $\alpha < 0$
d nessuna delle precedenti

(4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 + \log x}{(x+1)^2}\, dx$ vale

a $+\infty$
b $\frac{1}{2} + \log 2$
c $\log \frac{1}{2}$
d nessuna delle precedenti

(5) La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\log(n+1)}$ ha insieme di convergenza

a $[-1, 1)$
b $(-1, 1)$
c $\mathbb{R}$
d nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che per $x \to 0$ si ha

$$e^{\alpha x} - \cos\sqrt{x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)$$
$$= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) x + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{24}\right) x^2 + o(x^2)$$

mentre $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \frac{2}{3}x + o(x) \sim \frac{2}{3}x$, otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x} - \cos\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0^+} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{24}\right) x + o(x) = \frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

ed essendo $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \arctan(\beta x) = 0 = f(0)$, otteniamo che la funzione risulta continua solo per $\alpha = -\frac{1}{2}$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Riguardo la derivabilità, per $\alpha = -\frac{1}{2}$, dai precedenti sviluppi abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x} - \cos\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{8}$$

e quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = \frac{1}{8}$. Essendo invece $f'(x) = \frac{\beta}{\sqrt{1+(\beta x)^2}}$ per ogni $x < 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$, si ha che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Ne concludiamo allora che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{8}$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Osserviamo che, posto $f(x) = x^3 + |x^2 - 2|$, l'equazione data equivale a $f(x) = \alpha$. Studiamo quindi l'immagine della funzione $f(x)$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 + x^2 - 2 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right) = \pm\infty.$$

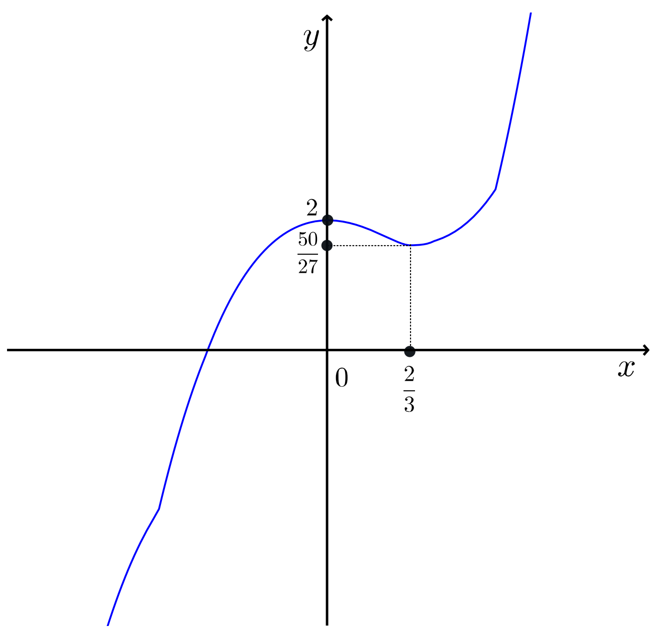
Poichè la funzione è continua in $\mathbb{R}$, dal Teorema dei valori intermedi possiamo dedurre che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette almeno una soluzione e quindi che $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Per determinare il numero esatto delle soluzioni, studiamo la monotonia della funzione. Osservato che per ogni $x \in I\!\!R$ risulta

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2 & \text{se } |x| \geq \sqrt{2} \\ x^3 - x^2 + 2 & \text{se } |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

abbiamo che la funzione risulta derivabile in ogni $|x| \neq \sqrt{2}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x = x(3x+2) & \text{se } |x| > \sqrt{2} \\ 3x^2 - 2x = x(3x-2) & \text{se } |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

Risulta allora $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, 0) \cup (\frac{2}{3}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (\frac{2}{3}, \sqrt{2})$. Dal criterio di monotonia stretta possiamo concludere che la funzione risulta strettamente crescente in $(-\infty, 0]$ ed in $[\frac{2}{3}, +\infty)$ mentre risulta strettamente decrescente in $[0, \frac{2}{3}]$. Il punto $x = 0$ risulta allora punto di massimo relativo con $f(0) = 2$, mentre il punto $x = \frac{2}{3}$ risulta punto di minimo relativo con $f(\frac{2}{3}) = \frac{50}{27}$.



Dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia stretta della funzione possiamo dedurre che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette esattamente

- una soluzione per ogni $\alpha > 2$ e $\alpha < \frac{50}{27}$;

• due soluzioni per $\alpha = 2$ e $\alpha = \frac{50}{27}$;
• tre soluzioni per ogni $\frac{50}{27} < \alpha < 2$.

Ne concludiamo allora che anche $\boxed{\text{b}}$ e $\boxed{\text{c}}$ risultano false.

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per ogni $\alpha > 0$, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \sin(\alpha x^2) - x^2 e^{2x^2} = \alpha x^2 + o(x^4) - x^2(1 + 2x^2 + o(x^2)) \\ &= (\alpha - 1)x^2 - 2x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha \neq 1$ allora $f_\alpha(x) = (\alpha-1)x^2 + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo 2, se $\alpha = 1$ allora $f_\alpha(x) = -2x^4 + o(x^4)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo 4. Quindi la risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, integrando per parti abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \log x}{(x+1)^2}\, dx &= -\frac{1 + \log x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}\, dx = -\frac{1 + \log x}{x+1} + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\, dx \\ &= -\frac{1 + \log x}{x+1} + \log|x| - \log|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1 + \log x}{(x+1)^2}\, dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1 + \log x}{(x+1)^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1 + \log x}{x+1} + \log|x| - \log|x+1| \right]_1^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} -\frac{1 + \log b}{b+1} + \log b - \log(b+1) + \frac{1}{2} + \log 2 = \frac{1}{2} + \log 2 \end{aligned}$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Posto $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$, per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n}\log(n+1)}{\sqrt{n+1}\log(n+2)} \to 1$$

e dunque, dal metodo del rapporto di D'Alembert, ne segue che la serie ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Dalle proprietà del raggio di convergenza otteniamo allora che la serie converge in ogni $|x| < 1$ e non converge in ogni $|x| > 1$. Osservato poi che

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\log(n+1)} \to +\infty$$

e che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, dal criterio del confronto asintotico possiamo concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge e quindi che la serie di potenze diverge per $x = 1$.
Si osservi poi che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e che, essendo il logaritmo e la radice quadrata funzioni crescenti, risulta $\sqrt{n}\log(n+1) < \sqrt{n+1}\log(n+2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dal Criterio di Leibniz possiamo allora concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ risulta convergente e quindi che la serie di potenze converge per $x = -1$.
Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che l'insieme di convergenza della serie di potenze data è $[-1, 1)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12 settembre 2015

(1) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2+x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \tan(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è derivabile per ogni $\alpha \leq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha < 1$ e $\beta = 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2) Tra le aree di tutti i rettangoli di diagonale uguale a $d > 0$ quella massima è

$\boxed{\text{a}}$ d^2
$\boxed{\text{b}}$ $2d^2$
$\boxed{\text{c}}$ $\frac{d^2}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt{1-x} - e^{\alpha x} - \sin(\cos x - 1)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) L'integrale $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{|x-1|}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $8e - 6$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{4}{e} - 3$
$\boxed{\text{c}}$ 0
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \log \frac{1}{n}}{n^{\alpha n} n!}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$\boxed{\text{a}}$ convergente solo se $\alpha \geq 0$
$\boxed{\text{b}}$ convergente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ divergente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2} = 1 + \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2) - \left(1 - \tfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = \tfrac{2}{3}x^2 + o(x^2)$$

otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2 + x^\alpha} = \tfrac{2}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + x^{\alpha-2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 2 \\ \frac{2}{3} & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

ed essendo $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \tan(\beta x) = 0 = f(0)$, otteniamo che la funzione risulta continua solo per $\alpha < 2$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Riguardo la derivabilità, per $\alpha < 2$, dai precedenti sviluppi abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x(x^2 + x^\alpha)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^{\alpha+1}} \\ &= \tfrac{2}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

e quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = \frac{2}{3}$ se $\alpha = 1$, $f'_+(0) = 0$ se $\alpha < 1$. Essendo invece $f'(x) = \frac{\beta}{\cos^2(\beta x)}$ per ogni $x < 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$, si ha che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Ne concludiamo allora che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{2}{3}$ e per $\alpha < 1$ e $\beta = 0$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Osserviamo che, detta b la base del rettangolo, h l'altezza e d la diagonale, dal Teorema di Pitagora risulta $h = \sqrt{d^2 - b^2}$. L'area di un rettangolo di diagonale d e base b sarà quindi data dal prodotto $b \cdot \sqrt{d^2 - b^2}$. Determiniamo allora il massimo della funzione $A(b) = b \cdot \sqrt{d^2 - b^2}$ con $b \in [0, d]$. La funzione risulta derivabile in ogni $b \in (0, d)$ con

$$A'(b) = \frac{d^2 - 2b^2}{\sqrt{b^2 - d^2}}$$

Avremo allora che $A'(b) > 0$ se $b < \frac{d}{\sqrt{2}}$, $A'(b) < 0$ se $b > \frac{d}{\sqrt{2}}$ e quindi che la funzione risulta crescente in $[0, \frac{d}{\sqrt{2}}]$, decrescente in $[\frac{d}{\sqrt{2}}, d]$. Il punto $b_0 = \frac{d}{\sqrt{2}}$ risulta allora punto di massimo

assoluto con $A(b_0) = \frac{d^2}{2}$. Osserviamo che il rettagolo di diagonale d di area massima è un quadrato di lato $\frac{d}{\sqrt{2}}$.
In alternativa, detto $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angolo tra la base del rettangolo e la sua diagonale, la base del rettagolo sarà uguale a $d\cos\alpha$, l'altezza a $d\sin\alpha$. L'area del rettangolo di diagonale d sarà allora data da $d^2\cos\alpha\sin\alpha$ e si poteva determinare il massimo della funzione $A(\alpha) = d^2\cos\alpha\sin\alpha$ al variare di $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Il valore massimo di tale funzione risulta $\frac{d^2}{2}$ e si ottiene in corrispondenza di $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, per ogni $\alpha > 0$, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= \sqrt{1-x} - e^{\alpha x} - \sin(\cos x - 1)\\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + o(x^2) - (1 + \alpha x + \tfrac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)) - (\cos x - 1 + o((\cos x - 1)^2))\\
&= -(\tfrac{1}{2} + \alpha)x - (\tfrac{1}{8} + \tfrac{\alpha^2}{2})x^2 + o(x^2) - (-\tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2))\\
&= -(\tfrac{1}{2} + \alpha)x - (\tfrac{\alpha^2}{2} - \tfrac{3}{8})x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ allora $f_\alpha(x) = -(\frac{1}{2} + \alpha)x + o(x)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo 1, se $\alpha = -\frac{1}{2}$ allora $f_\alpha(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo 2. Quindi la risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, dalla proprietà di additività dell'integrale abbiamo che

$$\int_0^2 x^2 e^{|x-1|}\,dx = \int_0^1 x^2 e^{1-x}\,dx + \int_1^2 x^2 e^{x-1}\,dx$$

Integrando per parti si ottiene che

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{1-x}\,dx &= -x^2e^{1-x} + \int 2xe^{1-x}\,dx = -x^2e^{1-x} - 2xe^{1-x} + \int 2e^{1-x}\,dx\\
&= -x^2e^{1-x} - 2xe^{1-x} - 2e^{1-x} + c = -e^{1-x}(x^2 + 2x + 2) + c, \quad c \in I\!R
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 x^2 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}(x^2 + 2x + 2)\right]_0^1 = 2e - 5.$$

Mentre

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{x-1}\,dx &= x^2e^{x-1} - \int 2xe^{x-1}\,dx = x^2e^{1-x} - 2xe^{x-1} + \int 2e^{x-1}\,dx\\
&= x^2e^{x-1} - 2xe^{x-1} + 2e^{x-1} + c = e^{x-1}(x^2 - 2x + 2) + c, \quad c \in I\!R
\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_1^2 x^2 e^{x-1}\,dx = \left[e^{x-1}(x^2-2x+2)\right]_1^2 = 2e-1.$$

Ne concludiamo che

$$\int_0^2 x^2 e^{|x-1|}\,dx = \int_0^1 x^2 e^{1-x}\,dx + \int_1^2 x^2 e^{x-1}\,dx = 2e-5+2e-1 = 4e-6$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Posto $a_n = \frac{(2n)!\log\frac{1}{n}}{n^{\alpha n} n!}$[(a)], per $n \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!\log\frac{1}{n+1}}{(n+1)^{\alpha n+\alpha}(n+1)!}\cdot\frac{n^{\alpha n} n!}{(2n)!\log\frac{1}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^{\alpha+1}}\,\frac{\log(n+1)}{\log n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n}\\ &\sim \frac{4n^2}{n^{\alpha+1}}e^{-\alpha} = \frac{4}{n^{\alpha-1}}e^{-\alpha} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1\\ \frac{4}{e} & \text{se } \alpha = 1\\ +\infty & \text{se } \alpha < 1\end{cases}\end{aligned}$$

Dal criterio del rapporto, essendo $\frac{4}{e} > 1$, ne segue che la serie converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

[(a)] Nota, la serie è a termini negativi, i risultati visti per le serie a termini positivi continuano però a valere essendo i termini della serie di segno costante