Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale

Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9 gennaio 2012 – $\boxed{A}$

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Dimostrare che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha ordine di infinito minore di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha ordine di infinito minore di $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha ordine di infinito minore di $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione divergente a $+\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$

B. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ è convergente. $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \geq 1$. $\boxed{\text{Vero}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9 gennaio 2012 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione convessa ed enunciare i noti criteri di convessità.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di integrabilità.

(3) Dimostrare che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è asintotica a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è asintotica a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è asintotica a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) **(4)** Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi divergente e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione divergente a $+\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

B. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$

C. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \leq 1$. $\boxed{\text{Vero}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 28 febbraio 2012 – $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di serie numerica convergente e divergente. Enunciare il criterio del confronto e del confronto asintotico per serie a termini non negativi.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(3) Enunciare e provare la regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[a, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $f(x)$ ammette massimo in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 28 febbraio 2012 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze, enunciare il Teorema di Abel (di convergenza in intervalli) ed il Teorema sul raggio di convergenza.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale.

(3) Enunciare e provare la regola di derivazione della funzione inversa.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[a, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $f(x)$ ammette minimo in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 24 marzo 2012

(1) Fornire la definizione primitiva e di integrale indefinito. Enunciare la Formula fondamentale del calcolo integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Enunciare e provare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = a + b$.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $f'(x)$ è limitata in (a, b). $\boxed{\text{Falso}}$

C. Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11 giugno 2012

(1) Fornire la definizione di funzione convessa e l'interpretazione geometrica. Enunciare i criteri di convessità. Provare che $f(x) = x^4$ è funzione convessa nel suo dominio.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni a termini positivi.

(3) Provare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se e solo se $p > 1$.

(4) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ serie di potenze di raggio di convergenza $\rho = 1$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge per ogni $|x| < 1$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 2^n$ non converge. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 3 luglio 2012

(1) Fornire la definizione di integrale improprio per funzioni continue in $(a, b]$. Enunciare il criterio del confronto e del confronto asintotico per tale integrale e provare che $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ converge se e solo se $p < 1$.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno.

(3) Provare che ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore finito.

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in (a, b) con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in (a, b). $\boxed{\text{Vero}}$

B. Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = \ell$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 3 settembre 2012

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di convessità per funzioni derivabili.

(3) Provare che se una successione ammette limite questo è unico.

(4) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ serie di potenze di raggio di convergenza $\rho = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^n$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $\lim_{n\to+\infty} a_n b^n = 0$ per ogni $b > 0$. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ converge. $\boxed{\text{Falso}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 ottobre 2012

(1) Fornire la definizione di serie convergente ed enunciare il criterio del confronto e del confronto asintotico per serie a termini non negativi.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Provare che ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore finito.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[0, +\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa:

A. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. $\boxed{\text{Falso}}$

C. se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$ allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. $\boxed{\text{Vero}}$