Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11/12/2008– A

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare la Proprietà Archimedea.

(3) Siano (a_n) e (b_n) successioni positive, infinitesime e asintotiche per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Per ogni successione (c_n), $a_n - c_n \sim b_n - c_n$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Per ogni $\alpha \in I\!R$, ${a_n}^{\alpha} \sim {b_n}^{\alpha}$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\log a_n \sim \log b_n$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $I\!R$ tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I\!R$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è iniettiva. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\mathrm{Im} f(x) = I\!R$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. esiste $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$ sono positive ed infinitesime per $n \to +\infty$. Inoltre, essendo $a_n \sim \frac{1}{n}$ e $b_n \sim \frac{1}{n}$, risulta $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Considerata la successione $c_n = \frac{1}{n}$, si ha $a_n - c_n = \frac{1}{n^2}$ mentre $b_n - c_n = \frac{1}{n^3}$ e dunque $a_n - c_n \not\sim b_n - c_n$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, ricordando che dai limiti notevoli, $x_n^\alpha \to x_0^\alpha$ per ogni successione $x_n \to x_0 > 0$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, risulta

$$\frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = (\frac{a_n}{b_n})^\alpha \to 1$$

essendo $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, e dunque $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, dalle proprietà dei logaritmi, per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log(\frac{a_n}{b_n})}{\log b_n} + 1 \to 1$$

essendo $\log(\frac{a_n}{b_n}) \to 0$ e $\log b_n \to -\infty$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Difatti, se per assurdo esistessero $a \neq b$ (ad esempio $a < b$) tali che $f(a) = f(b)$ dal Teorema di Rolle applicato all'intervallo $[a, b]$, esisterebbe $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$, in contraddizione con $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \arctan x$ è derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma $\mathrm{Im} f(x) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, per quanto provato in $\boxed{\textbf{A}}$, la funzione è iniettiva ed essendo continua, per un noto teorema, abbiamo che la funzione risulta strettamente monotona. Dal Teorema sul limite delle funzioni monotone risulta allora che esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11/12/2008– B

(1) Fornire la definizione e la caratterizzazione di estremo superiore di un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato $A \subset \mathbb{R}$.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di integrabilità.

(3) Siano (a_n) e (b_n) successioni asintotiche per $n \to +\infty$ e tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Per ogni successione (c_n), $a_n + c_n \sim b_n + c_n$ per $n \to +\infty$. Vero Falso

B. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ${a_n}^\alpha \sim {b_n}^\alpha$ per $n \to +\infty$. Vero Falso

C. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$. Vero Falso

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è strettamente monotona. Vero Falso

B. esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Vero Falso

C. $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \{\pm\infty\}$. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = n^2 + n$ e $b_n = n^2 + 1$ sono infinite per $n \to +\infty$. Inoltre, essendo $a_n \sim n^2$ e $b_n \sim n^2$, risulta $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Considerata la successione $c_n = n^2$ risulta $a_n - c_n = n$ mentre $b_n - c_n = 1$ e dunque $a_n - c_n \not\sim b_n - c_n$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, ricordando che dai limiti notevoli, $x_n^\alpha \to x_0^\alpha$ per ogni successione $x_n \to x_0 > 0$ e ogni $\alpha \in I\!R$, risulta

$$\frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = (\frac{a_n}{b_n})^\alpha \to 1$$

essendo $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, e dunque $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio, considerate come sopra le successioni $a_n = n^2 + n$ e $b_n = n^2 + 1$, risulta

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{n-1} \to +\infty, \quad n \to +\infty$$

e dunque $e^{a_n} \not\sim e^{b_n}$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Si ha innanzitutto che la funzione risulta iniettiva. Infatti, se per assurdo esistessero $a \neq b$ (ad esempio $a < b$) tali che $f(a) = f(b)$ dal Teorema di Rolle applicato all'intervallo $[a, b]$, esisterebbe $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$, in contraddizione con $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I\!R$. Infine, essendo la funzione continua, da un noto teorema, abbiamo che la funzione risulta strettamente monotona.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, per quanto provato in $\boxed{\text{A}}$, $f(x)$ risulta strettamente monotona e dal Teorema sul limite delle funzioni monotone segue che esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \arctan x$ è derivabile in $I\!R$ con $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ per ogni $x \in I\!R$ ma $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 08/01/2009

(1) Fornire la definizione di funzione convessa, enunciare i criteri di convessità e dedurne che $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Sia $f(x)$ funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Vero Falso

B. $f(x)$ è invertibile sulla sua immagine. Vero Falso

C. $f^{-1}(x)$ è strettamente crescente nel suo dominio. Vero Falso

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[1, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$. Posto $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Esiste $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Vero Falso

B. $\lim_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R}$. Vero Falso

C. $F(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo per ipotesi la funzione strettamente crescente in ogni $[a,b] \subset I\!R$, risulta $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$.
Nota su un errore frequente: una funzione monotona non è necessariamente continua.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera, infatti essendo la funzione strettamente crescente risulta in particolare iniettiva e dunque invertibile sulla sua immagine.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, per ogni $y_1, y_2 \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$, siano $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Se $y_1 < y_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ ed essendo $f(x)$ strettamente crescente si avrà $x_1 < x_2$ ovvero $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Nota su un errore frequente:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

la funzione inversa non è la funzione reciproca!

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti poichè $\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = +\infty$, dalla definizione di limite esiste $a > 0$ tale che $xf(x) > 0$ per ogni $x > a$ e quindi che $f(x) > 0$ per ogni $x > a$. Dal Teorema fondamentale del calcolo risulta allora che $F'(x) = f(x) > 0$ per ogni $x > a$ e quindi, dal criterio di monotonia, che $F(x)$ risulta strettamente crescente in $[a, +\infty)$. Dal Teorema sul limite delle funzioni monotone concludiamo che esiste $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup_{x\geq a} F(x)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è continua in $[1, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ma $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti per quanto provato in $\boxed{\mathrm{A}}$, esiste $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell \in I\!R \cup \{+\infty\}$. Se $\ell \in I\!R$ allora dall'algebra dei limiti si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ e dunque che $F(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$. Se $\ell = +\infty$, dal Teorema di de L'Höpital si ha, per ipotesi, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

e quindi che $F(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 21/03/2009

(1) Fornire la definizione di integrale improprio di una funzione $f(x)$ continua in $[a, +\infty)$. Enunciare il Teorema del confronto asintotico per tale integrale e provare che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ converge se e solo se $p > 1$.

(2) Enunciare e dimostrare il secondo Teorema dei valori intermedi.

(3) Sia $f(x)$ funzione definita e limitata nell'intervallo $[a, b] \subset I\!R$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette massimo o minimo in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. se $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ allora $f(x)$ è costante in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\exists\, (x_n)_{n\in I\!N} \subset [a, b]$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile e strettamente convessa in $(a, +\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è inferiormente limitata in $(a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ è strettamente monotona in $(a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $f(x)$ ammette al più un punto di minimo in $(a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } x = 1 \end{cases}$$

è limitata in $[0,1]$ ma non ammette ne' massimo ne' minimo in $[0,1]$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, per definizione di estremo superiore ed inferiore si ha che

$$\inf_{t\in[a,b]} f(t) \le f(x) \le \sup_{t\in[a,b]} f(t) \quad \text{per ogni } x \in [a,b],$$

quindi se $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$ allora $f(x) = m$ per ogni $x \in [a,b]$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, dalla caratterizzazione di estremo inferiore si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che, posto $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, risulta $m \le f(x_n) \le m + \frac{1}{n}$. Dal Teorema dei carabinieri segue allora che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = m$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = -\log x$ è funzione strettamente convessa in $(0,+\infty)$ ma risulta $\inf_{x\in(0,+\infty)} f(x) = \infty$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente convessa in $(-1,+\infty)$ ma non risulta strettamente monotona in $(-1,+\infty)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, dal Teorema di Fermat abbiamo che se $x_0 \in (a,+\infty)$ è punto di minimo relativo per $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$. Poichè $f(x)$ risulta strettamente convessa, dai criteri di convessità si ha che $f'(x)$ risulta strettamente crescente in $(a,+\infty)$ e quindi che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$. Dal Teorema di Fermat otteniamo allora che $f(x)$ non ammette altri punti di minimo relativo.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 04/04/2009

(1) Fornire la definizione di integrale improprio di funzioni continue su un intervallo $[a, b) \subset \mathbb{R}$. Determinare $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\, dx$ per $p > 0$. Enunciare il criterio degli infinitesimi per funzioni continue su un intervallo $[a, b)$.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni positive.

(3) Sia $f(x)$ funzione derivabile e iniettiva in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. f è strettamente monotona in I. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $f^{-1}(y)$ è derivabile in ogni $y \in f(I)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[a, +\infty)$. Posto $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$, dove $x_0 > a$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. F ammette un unico zero in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, per ipotesi la funzione è derivabile e dunque risulta continua nell'intervallo I. Essendo continua e iniettiva nell'intervallo I, per noto risultato, si ha che la funzione risulta strettamente monotona.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ è derivabile ed iniettiva in $I = \mathbb{R}$ ma $f'(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Consideriamo nuovamente la funzione $f(x) = x^3$ in $I = \mathbb{R}$, la sua funzione inversa $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ non è derivabile in $0 \in f(I) = \mathbb{R}$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = 3x^2$ è continua e positiva in $[1, +\infty)$, ma $F(x) = \int_2^x 3t^2 dt = [t^3]_2^x = x^3 - 8$ è negativa per $x < 2$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti risulta $F(x_0) = 0$ e tale zero è unico in quanto, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo che $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x > a$. Poichè per ipotesi $f(x)$ è positiva in $[a, +\infty)$, dal criterio di monotonia stretta segue che $F(x)$ è strettamente crescente e dunque iniettiva.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera, infatti poichè, per quanto provato in $\boxed{\textbf{B}}$, $F(x)$ risulta strettamente crescente in $[a, +\infty)$, dal Teorema sul limite delle funzioni monotone concludiamo che esiste $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup_{x\geq a} F(x)$. Inoltre, essendo $F(x_0) = 0$ ed $F(x)$ strettamente crescente, si ha che $\sup_{x\geq a} F(x) \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 26/06/2009

(1) Fornire la definizione di funzione continua in un punto e la classificazione dei punti di discontinuità con relativi esempi.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di monotonia per funzioni derivabili in un intervallo.

(3) Siano X e Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che $X \subseteq Y$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\sup X \leq \sup Y$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\inf X \leq \inf Y$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. se $X \neq Y$ allora $\sup X \neq \sup Y$ oppure $\inf X \neq \inf Y$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[a, +\infty)$ e infinitesima per $x \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste (finito o infinito). $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^2(x)\, dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^2(x)\, dx$ diverge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, se Y risulta superioremente illimitato, la proprietà è immediata. Se Y risulta superioremente limitato, essendo $X \subseteq Y$ avremo che ogni maggiorante di Y risulta maggiorante di X. Dalla definizione di estremo superiore si ottiene allora che $\sup Y$ risulta maggiorante di X, da cui

$$\sup X = \min\{L \in \mathbb{R} \,|\, x \leq L,\ \forall x \in X\} \leq \sup Y.$$

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa, ad esempio si considerino gli insiemi $X = (1, 2)$ e $Y = (0, 2)$ abbiamo che $X \subset Y$ ma $1 = \inf X > \inf Y = 0$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa, ad esempio si considerino gli insiemi $X = (0, 1)$ e $Y = [0, 1]$ abbiamo che $X \subset Y$ con $X \neq Y$ ma $\inf X = \inf Y = 0$ e $\sup X = \sup Y = 1$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti poichè $f(x)$ risulta positiva e continua in $[a, +\infty)$ dal Teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che, posto $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$, risulta $F'(b) = f(b) \geq 0$ per ogni $b > a$. Dal criterio di monotonia abbiamo dunque che $F(b)$ risulta monotona crescente in $[a, +\infty)$ e dunque, dal Teorema sul limite delle funzioni monotone, ne segue che esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{b \to +\infty} F(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ positiva in $[a, +\infty)$ e infinitesima per $x \to +\infty$ abbiamo che esiste $b > a$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \geq b$. Ne segue che per ogni $x \geq b$ risulta $0 \leq f^2(x) \leq f(x)$ e poichè $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto otteniamo che anche $\int_a^{+\infty} f^2(x)\,dx$ converge.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua e positiva in $[1, +\infty)$ con $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ divergente, mentre $\int_1^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ risulta convergente.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13/07/2009

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile. Descriverne il significato cinematico e geometrico.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio del rapporto per successioni positive.

(3) Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue e monotone crescenti in $[0, +\infty)$ tali che $f(0) < g(0)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Esiste $x_0 > 0$ tale che $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in (0, x_0)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. L'equazione $f(x) = g(x)$ ammette al più una soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua limitata e positiva in $[a, +\infty)$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è limitata in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $F(x)$ è positiva in $(a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{x \to +\infty} F(x) > 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, ad esempio le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$ sono continue e crescenti in $[0, +\infty)$ con $f(0) = 0 < g(0) = 2$ ma per ogni $x > 2$ risulta $f(x) > g(x)$.
$\boxed{\textbf{B}}$ È vera, infatti essendo le funzioni continue risulta

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) < g(0) = \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

e dal Teorema della permanenza del segno abbiamo che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in (0, \delta)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa, ad esempio le funzioni $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = x^2$ sono continue e crescenti in $[0, +\infty)$ con $f(0) = -2 < g(0) = 0$ ma l'equazione $f(x) = g(x)$ ammette due soluzioni in $[0, +\infty)$: $x = 1$ e $x = 2$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = 1$ è continua limitata e positiva in $[0, +\infty)$ ma $F(x) = \int_0^x dt = x$ non è limitata in $[0, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti poichè $f(x)$ risulta positiva e continua in $[a, +\infty)$ dal Teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che $F'(x) = f(x) > 0$ per ogni $x > a$. Dal criterio di monotonia abbiamo dunque che $F(x)$ risulta strettamente crescente in $[a, +\infty)$ e quindi che per ogni $x > a$ risulta $F(x) > F(a) = 0$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, da quanto provato nel precedente punto $F(x)$ risulta strettamente crescente in $[a, +\infty)$ e dal Teorema sul limite delle funzioni monotone abbiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \sup\{F(x) \,|\, x \in [a, +\infty)\} > F(a) = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 07/09/2009

(1) Fornire la definizione dell'integrale di Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Sia $f(x)$ funzione strettamente decrescente in $\mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è iniettiva in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $Im(f) = \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $f^{-1}(x)$ è strettamente decrescente nel suo dominio. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $(0,1]$ tale che $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} f(x) = +\infty$. Posto $F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Esiste $\lim_{x\to 0^+} F(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x\to 0^+} F(x) \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera, infatti se $x_1 \neq x_2$ allora $x_1 > x_2$ oppure $x_1 < x_2$. Essendo la funzione strettamente decrescente nel primo caso otteniamo che $f(x_1) < f(x_2)$ mentre nel secondo $f(x_1) > f(x_2)$. In ogni caso risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$ e dunque che $f(x)$ è iniettiva.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = e^{-x}$ è strettamente decrescente ma $Im(f) = (0, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, siano $y_1, y_2 \in Dom(f^{-1}) = Im(f)$ tali che $y_1 < y_2$. Posto $f^{-1}(y_1) = x_1$ e $f^{-1}(y_2) = x_2$ risulta $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ e dunque che $f(x_1) < f(x_2)$. Essendo $f(x)$ strettamente decrescente ne segue che $x_1 > x_2$ ovvero che $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ e dunque che $f^{-1}(x)$ è strettamente decrescente.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $\sqrt{x}f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ otteniamo che esiste $\delta \in (0,1)$ tale che $f(x) > 0$ per $x \in (0, \delta)$. Dal Teorema fondamentale del calcolo abbiamo inoltre che $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$ risulta derivabile in $(0,1)$ con $F'(x) = -f(x)$ per ogni $x \in (0,1)$. Dunque $F'(x) < 0$ per $x \in (0, \delta)$ e $F(x)$ risulta decrescente in $(0, \delta)$. Dal Teorema sul limite di funzioni monotone ne deduciamo che esiste

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \sup_{x \in (0,\delta)} F(x).$$

$\boxed{\textbf{B}}$ e $\boxed{\textbf{C}}$ sono false. Scelta $f(x) = \frac{1}{x^p}$ abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^p} = +\infty$$

per ogni $p > \frac{1}{2}$. Osserviamo allora che

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge se $\frac{1}{2} < p < 1$ mentre diverge se $p \geq 1 > \frac{1}{2}$.