Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13/12/2007– $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua, positiva e pari in $\mathbb{R}$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è dispari. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Per ogni $b > 0$, $\int_{-b}^b f(t)dt = 2\int_0^b f(t)dt$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) successioni regolari e positive tali che $b_n = o(a_n)$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n + b_n} = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Per ogni successione non nulla (c_n) , $\frac{b_n}{c_n} = o(a_n)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log(1+b_n)}{a_n} = 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ pari, per ogni $x \in \mathbb{R}$, operando la sostituzione $t = -s$, risulta

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^{x} f(-s)ds = -\int_0^{x} f(s)ds = -F(x)$$

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è continua e pari in $\mathbb{R}$ mentre, essendo $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$, risulta $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$. Un altro esempio è dato dalla funzione $f(x) = \cos x$, continua e pari in $\mathbb{R}$ ma tale che $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt = \sin x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Infatti, avendo provato che $F(x)$ è dispari, per ogni $b > 0$, dalla proprietà di additività dell'integrale risulta

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b} f(t)dt &= \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt = -\int_0^{-b} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt \\ &= -F(-b) + F(b) = 2F(b) = 2\int_0^b f(t)dt\end{aligned}$$

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Difatti dalla definizione di "o" piccolo e dalla legge di cancellazione dei termini trascurabili si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{o(a_n)}{a_n + o(a_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{o(a_n)}{a_n} = 0.$$

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ e $c_n = \frac{1}{n^3}$ sono tali che $b_n = o(a_n)$ mentre $\frac{b_n}{c_n} \neq o(a_n)$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{b_n}{c_n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}\frac{1}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} n^3 = +\infty$$

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Difatti, per ogni successione (b_n) tale che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$, essendo $\frac{\log(1+b_n)}{b_n} \to 1$, dalla definizione di "o" piccolo si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+b_n)}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+b_n)}{b_n}\frac{b_n}{a_n} = 0$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13/12/2007– $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di derivata ed il suo significato geometrico.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua e dispari in $\mathbb{R}$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è pari. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Per ogni $b > 0$, $\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) successioni regolari e positive tali che $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{b_n} = 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Per ogni successione (c_n), $a_n c_n = o(b_n)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{b_n} = 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ dispari, per ogni $x \in \mathbb{R}$, operando la sostituzione $t = -s$, risulta

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^{x} f(-s)ds = \int_0^{x} f(s)ds = F(x)$$

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è continua e dispari in $\mathbb{R}$ mentre, essendo $\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, risulta $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Un altro esempio è dato dalla funzione $f(x) = \sin x$, continua e dispari in $\mathbb{R}$ ma tale che $F(x) = \int_0^x \sin t\, dt = 1 - \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, avendo provato che $F(x)$ è pari, per ogni $b > 0$ dalla proprietà di additività dell'integrale risulta

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b} f(t)dt &= \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_0^{b} f(t)dt = -\int_0^{-b} f(t)dt + \int_0^{b} f(t)dt \\ &= -F(-b) + F(b) = 0\end{aligned}$$

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Difatti dalla definizione di "o" piccolo e dalla legge di cancellazione dei termini trascurabili si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n + o(b_n)}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_n} = 1.$$

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $c_n = n^3$ sono tali che $a_n = o(b_n)$ mentre $a_n c_n \neq o(b_n)$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n c_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} n^3 = +\infty$$

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Difatti, per ogni successione (a_n) tale che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, essendo $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$, dalla definizione di "o" piccolo si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 8/01/2008 – $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di integrale improprio su intervallo limitato, provare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se e solo se $p < 1$ ed enunciare il criterio del confronto asintotico.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di convessità.

(3) Sia (a_n) una successione divergente a $+\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. (a_n) è crescente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $(\frac{1}{a_n})$ è limitata. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni non negative e continue in $[1, +\infty)$ tali che $f(1) > g(1) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ e $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [1, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. esiste $a > 1$ tale che $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in (a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. esiste $x_0 > 1$ tale che $f(x_0) = g(x_0)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si pensi ad esempio alla successione $a_n = (2+(-1)^n)n$ tale successione diverge a $+\infty$ essendo $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ma non risulta crescente.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Difatti, dalla definizione di limite, per ogni $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq \nu$. Posto allora $m = \min\{M, a_1, a_2, ..., a_{\nu-1}\}$ risulta $a_n \geq m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione risulta inferiormente limitata. Dal Teorema di esistenza dell'estremo superiore ed inferiore, segue allora che $\inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, dall'algebra dei limiti, essendo $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, si ha $\frac{1}{a_n} \to 0$. Ed essendo la succesione $(\frac{1}{a_n})$ convergente risulterà anche limitata.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Difatti le funzioni $f(x) = \frac{2}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ sono non negative e continue in $[1, +\infty)$ e $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$ essendo $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$. Inoltre, $f(1) = 2 > g(1) = 1 > 0$ mentre per ogni $x > 2$ risulta $f(x) < g(x)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Difatti, essendo $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$, dalla definizione di "o" piccolo risulta $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ per $x \to +\infty$. Dalla definizione di limite otteniamo che esiste $a > 1$ tale che $|\frac{f(x)}{g(x)}| < 1$ per ogni $x > a$ e dunque, essendo le funzioni non negative, $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in (a, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Difatti, per quanto provato in $\boxed{\text{B}}$, esiste $b > a > 1$ tale che $f(b) < g(b)$ ed essendo per ipotesi $f(1) > g(1)$, dal Teorema di esistenza degli zeri applicato alla funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ nell'intervallo $[1, b]$, otteniamo che esiste $x_0 > 1$ tale che $h(x_0) = 0$ ovvero $f(x_0) = g(x_0)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13/12/2007– $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di derivata ed il suo significato geometrico.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua e dispari in $\mathbb{R}$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è pari. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x \to +\infty} F(x) \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Per ogni $b > 0$, $\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) successioni regolari e positive tali che $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_n + b_n}{b_n} = 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Per ogni successione (c_n), $a_n c_n = o(b_n)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\sin a_n}{b_n} = 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ dispari, per ogni $x \in \mathbb{R}$, operando la sostituzione $t = -s$, risulta

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^x f(-s)ds = \int_0^x f(s)ds = F(x)$$

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è continua e dispari in $\mathbb{R}$ mentre, essendo $\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, risulta $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Un altro esempio è dato dalla funzione $f(x) = \sin x$, continua e dispari in $\mathbb{R}$ ma tale che $F(x) = \int_0^x \sin t\, dt = 1 - \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, avendo provato che $F(x)$ è pari, per ogni $b > 0$ dalla proprietà di additività dell'integrale risulta

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b} f(t)dt &= \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt = -\int_0^{-b} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt \\ &= -F(-b) + F(b) = 0\end{aligned}$$

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Difatti dalla definizione di "o" piccolo e dalla legge di cancellazione dei termini trascurabili si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n + o(b_n)}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_n} = 1.$$

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $c_n = n^3$ sono tali che $a_n = o(b_n)$ mentre $a_n c_n \neq o(b_n)$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n c_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} n^3 = +\infty$$

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Difatti, per ogni successione (a_n) tale che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, essendo $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$, dalla definizione di "o" piccolo si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 14/03/2008– $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di estremo superiore finito ed infinito e le corrispondenti caratterizzazioni.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti.

(3) Sia $f(x)$ funzione definita in un intervallo $[a,b]$ tale che $f(x)$ risulta continua in (a,b) e $f(a)f(b)<0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0)=0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. per ogni $x_0 \in (a,b)$ esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. esiste finito $\lim_{x\to a^+} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[0,+\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $a>0$ tale che $f(x)$ risulta crescente in $[a,+\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ ammette minimo in $[0,+\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$ è definita in $[0,1]$, continua in $(0,1)$ con $f(0)f(1) = -1 < 0$ ma $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in (0,1)$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera, difatti essendo la funzione continua in (a,b) per ogni $x_0 \in (a,b)$ risulta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$ è definita in $[0,1]$, continua in $(0,1)$ con $f(0)f(1) = -1 < 0$ ma $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \sqrt{x} + \sin x + 1$ è continua e positiva in $[0,+\infty)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ma non risulta crescente in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 0$. Difatti $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x$ cambia segno infinite volte in ogni intervallo $[a,+\infty)$ essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) - \cos x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo la funzione positiva, abbiamo che $\{f(x)\,|\,x \in [0,+\infty)\}$ è insieme inferiormente limitato. Sia $m = \inf\limits_{x\geq 0} f(x) \geq 0$. Poichè $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, esiste $a > 0$ tale che $f(x) > m + 1$ per ogni $x > a$. Ne segue che $\inf\limits_{x>a} f(x) > \inf\limits_{x\geq 0} f(x)$ e dunque che

$$m = \inf_{x\geq 0} f(x) = \inf_{x\in[0,a]} f(x)$$

Essendo $f(x)$ funzione continua in $[0,a]$ dal Teorema di Weierstrass abbiamo che $f(x)$ ammette minimo in $[0,a]$ e dunque che esiste $x_0 \in [0,a]$ tale che

$$f(x_0) = \min_{x\in[0,a]} f(x) = \inf_{x\in[0,a]} f(x) = m$$

ovvero $f(x_0) = \min\limits_{x\geq 0} f(x)$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = 1 + x$ è continua e positiva in $[0,+\infty)$ con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ma $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx$ risulta divergente.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 14/03/2008– $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione continua e la classificazione delle discontinuità con relativi esempi.

(2) Enunciare e dimostrare la Formula fondamentale del calcolo integrale.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua e limitata $\mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette massimo o minimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia (a_n) successione positiva tale che $a_n \to 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\ell \leq 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\ell < 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. se $\ell \neq 1$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale $(a_n)_{n\geq n_0}$ risulta monotona. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa, ad esempio la funzione $\arctan x$ è continua e limitata in $I\!R$ ma non ammette ne' massimo ne' minimo in $I\!R$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $\sin x$ è continua e limitata in $I\!R$ ma non ammette limite per $x \to +\infty$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ continua in $I\!R$ per ogni $x_0 \in I\!R$ risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Difatti se per assurdo $\ell > 1$ dal criterio del rapporto per successioni positive avremo $a_n \to +\infty$ in contraddizione con l'ipotesi $a_n \to 0$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è successione positiva e infinitesima ma

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to \ell = 1$$

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Difatti, se $\ell < 1$, preso $0 < \varepsilon < 1 - \ell$, dalla definizione di limite esiste $n_0 \in I\!N$ tale che $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon < 1$ per ogni $n \geq n_0$ da cui, essendo $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq n_0$ e la successione $(a_n)_{n \geq n_0}$ risulta decrescente. Analogalmente, se $\ell > 1$, preso $0 < \varepsilon < \ell - 1$, esiste $n_0 \in I\!N$ tale che $1 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ per ogni $n \geq n_0$ ovvero $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \geq n_0$ e la successione $(a_n)_{n \geq n_0}$ risulta crescente.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 14/03/2008– $\boxed{\text{C}}$

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile ed enunciare il Teorema del differenziale.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri.

(3) Sia $f(x)$ funzione derivabile e strettamente convessa in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette almeno uno zero. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ ammette al più due zeri. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. esiste $a > 0$ tale che $f(x)$ risulta crescente in $[a, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia (a_n) successione positiva tale che $a_n \to 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\ell \leq 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\ell < 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. se $\ell \neq 1$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale $(a_n)_{n\geq n_0}$ risulta monotona. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, ad esempio la funzione $1 + x^2$ è derivabile e strettamente convessa in $\mathbb{R}$ con $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ ma non ammette alcun zero.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Siano a e b due zeri della funzione con $a < b$. Allora risulta $f(x)$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) con $f(a) = f(b) = 0$. Dal Teorema di Rolle segue che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. Essendo la funzione strettamente convessa, dal criterio di monotonia otteniamo che la derivata $f'(x)$ risulta strettamente crescente e dunque che $f'(x) < 0$ in $(-\infty, x_0)$ e $f'(x) > 0$ in $(x_0, +\infty)$. Ne segue che $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, x_0]$ e strettamente decrescente in $[x_0, +\infty)$, in particolare la funzione risulta iniettiva in $(-\infty, x_0]$ e in $[x_0, +\infty)$. Quindi $f(x)$ ammette un unico zero in ciascuno dei due intervalli e a e b risultano gli unici zeri di $f(x)$.

In alternativa, osserviamo che essendo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, $f(x)$ ammette minimo assoluto $x_0 \in \mathbb{R}$ (si veda risoluzione (4)-A nella prova A) e dal Teorema di Fermat, si ha che $f'(x_0) = 0$. Essendo la funzione strettamente convessa, $f'(x)$ risulta strettamente crescente e dunque $f'(x) < 0$ in $(-\infty, x_0)$ e $f'(x) > 0$ in $(x_0, +\infty)$. Ne segue che $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, x_0]$ e strettamente decrescente in $[x_0, +\infty)$. Si ottiene allora che se $f(x_0) > 0$ la funzione non ammette zeri, se $f(x_0) = 0$ la funzione ammette un unico zero mentre se $f(x_0) < 0$ la funzione ammette due zeri. Dunque $f(x)$ ammette al più due zeri

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, proviamo innanzitutto che esiste $a > 0$ tale che $f'(a) > 0$. Se così non fosse avremo che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x > 0$ e dunque che $f(x)$ risulta decrescente in $[0, +\infty)$ ed in particolare $f(x) \leq f(0)$ per ogni $x > 0$, in contraddizione con l'ipotesi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Sia dunque $a > 0$ tale che $f'(a) > 0$, essendo la funzione strettamente convessa, avremo che $f'(x)$ risulta strettamente crescente e dunque che $f'(x) > 0$ per ogni $x \geq a$. Ne segue allora che $f(x)$ risulta crescente in $[a, +\infty)$.

(4) Si veda risoluzione prova B.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 07/04/2008– $\boxed{\text{A}}$

(1) Illustrare il concetto di derivata, fornire la regola di derivazione della funzione inversa e dimostrare che $D(\arctan x) = \frac{1}{x^2+1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Sia $f(x)$ funzione monotona in $[a, b]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ per ogni $x_0 \in [a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è derivabile in (a, b). $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2 + 1}\, dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo per ipotesi la funzione monotona in $[a,b]$, se crescente risulta $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$ mentre se decrescente risulta $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa, ad esempio la funzione parte intera $f(x) = [x]$ è monotona crescente in $[0,2]$ ma non ammette limite in $x_0 = 1$ in quanto $\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$ mentre $\lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa, ad esempio la funzione parte intera $f(x) = [x]$ è monotona e dunque integrabile in $[0,2]$ ma la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x [t]\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

non risulta derivabile in $x_0 = 1$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti poichè $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, esiste $a > 0$ tale che $|f(x)| < 1$ per ogni $|x| > a$. Essendo $f(x)$ funzione continua in $[-a,a]$ dal Teorema di Weierstrass abbiamo che $f(x)$ è limitata in $[-a,a]$ e dunque che esiste $m > 0$ tale che $|f(x)| \leq m$ per ogni $x \in [-a,a]$. Posto $M = \max\{1, m\}$ si ottiene che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ è continua in $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ma $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ non converge essendo $f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti per quanto provato in $\boxed{\text{A}}$, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $\left|\frac{f(x)}{x^2+1}\right| \leq \frac{M}{x^2+1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed essendo $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ convergente, dal criterio del confronto otteniamo che $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx$ converge assolutamente e quindi converge.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 07/04/2008– B

(1) Fornire la definizione di minimo, di minorante e di estremo inferiore. Fornire un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che ammette estremo inferiore ma non ammette minimo.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(3) Sia $f(x)$ funzione monotona in $[a, b)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b)$. Vero Falso

B. esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ per ogni $x_0 \in [a, b)$. Vero Falso

C. $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è continua in $[a, b)$. Vero Falso

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[1, +\infty)$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[1, +\infty)$. Vero Falso

B. $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Vero Falso

C. $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$ converge. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è decrescente in $[-1, 0)$ ma non è limitata.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa, ad esempio la funzione parte intera $f(x) = [x]$ è monotona crescente in $[0, 2]$ ma non ammette limite in $x_0 = 1$ in quanto $\lim_{x \to 1^-} [x] = 0$ mentre $\lim_{x \to 1^+} [x] = 1$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera, infatti per ogni $c \in (a, b)$, essendo $f(x)$ monotona avremo che $f(x)$ risulta integrabile in $[a, c]$ e dunque la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ risulta continua in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$. Ne segue che $F(x)$ è continua in $[a, b)$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti poichè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, esiste $a > 1$ tale che $|f(x)| < 1$ per ogni $x > a$. Essendo $f(x)$ funzione continua in $[1, a]$ dal Teorema di Weierstrass abbiamo che $f(x)$ è limitata in $[1, a]$ e dunque che esiste $m > 0$ tale che $|f(x)| \leq m$ per ogni $x \in [1, a]$. Posto $M = \max\{1, m\}$ si ottiene che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [1, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $[1, +\infty)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ma $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti per quanto provato in A, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [1, +\infty)$. Quindi $\left| \frac{f(x)}{x^2} \right| \leq \frac{M}{x^2}$ per ogni $x \geq 1$ ed essendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ convergente, dal criterio del confronto otteniamo che $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$ converge assolutamente e dunque converge.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 23/06/2008

(1) Illustrare il concetto di funzione convessa ed enunciare i criteri di convessità.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3b) Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ insieme non vuoto e limitato. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\mathcal{A}$ ammette massimo e minimo. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. se $\inf \mathcal{A} = \sup \mathcal{A}$ allora $\mathcal{A}$ è costituito da un unico punto. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. se $\mathcal{A}$ non ammette minimo allora $\mathcal{A}$ contiene infiniti punti. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[1, +\infty)$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Posto $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ per ogni $x \geq 0$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è limitata in $[1, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $F(x)$ è positiva in $(1, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. Esiste $\lim_{x \to +\infty} F(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio l'insieme $\mathcal{A} = (0,1) \subset \mathbb{R}$ è limitato e non vuoto ma non ammette ne' massimo ne' minimo.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti posto $m = \inf \mathcal{A}$ e $M = \sup \mathcal{A}$, dalla definizione di estremo superiore ed inferiore si ha $m \leq a \leq M$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. Se $m = M$ allora risulta $m = a$ per ogni $a \in \mathcal{A}$ e dunque $\mathcal{A} = \{m\}$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera, infatti essendo $\mathcal{A}$ limitato avremo che $\inf \mathcal{A} \in \mathbb{R}$ ma che $\inf \mathcal{A} < a$ per ogni $a \in \mathcal{A}$. Fissato comunque $a_0 \in \mathcal{A}$, avremo che $\inf \mathcal{A} < a_0$ e dunque, dalla definizione di estremo inferiore, che a_0 non è un minorante di $\mathcal{A}$. Ne segue che esiste $a_1 \in \mathcal{A}$ tale che $\inf \mathcal{A} < a_1 < a_0$. Ripetendo il ragionamento, avremo che a_1 non è un minorante di $\mathcal{A}$ e quindi che esiste $a_2 \in \mathcal{A}$ tale che $\inf \mathcal{A} < a_2 < a_1$. Procedendo in questo modo, otterremo una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ tale che $\inf \mathcal{A} < a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $\mathcal{A}$ contiene infiniti punti.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua e positiva in $[1, +\infty)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ma $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \log x$ non è limitata in $[1, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, poichè $f(x)$ è continua in $[1, +\infty)$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (1, +\infty)$. Essendo $f(x)$ positiva in $[1, +\infty)$, dai criteri di monotonia stretta risulta che $F(x)$ è strettamente crescente in $[1, +\infty)$ ed essendo $F(1) = 0$ ne segue che $F(x) > 0$ per ogni $x > 1$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti per quanto provato in $\boxed{\text{B}}$, $F(x)$ è monotona crescente e per il Teorema sul limite delle funzioni monotone esiste $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \sup\limits_{x \in [1, +\infty)} F(x)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 10/07/2008

(1) Enunciare il criterio del rapporto per successioni positive e provare che per ogni $a > 0$ risulta $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di integrabilità.

(3) Sia $f(x)$ funzione definita e limitata in $[a, b]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette massimo o minimo in $[a, b]$. Vero Falso

B. se $\inf_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ allora $f(x)$ è costante in $[a, b]$. Vero Falso

C. esiste $(x_n) \subset [a, b]$ tale che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. Vero Falso

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $(0, 1]$ tale che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_0^1 f(x)\, dx$ diverge. Vero Falso

B. $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}$ diverge. Vero Falso

C. $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ converge. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } x = 1 \end{cases}$$

è limitata in $[0,1]$ ma non ammette ne' massimo ne' minimo.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti posto $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, dalla definizione di estremo superiore ed inferiore si ha $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. Se $m = M$ allora risulta $m = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera, infatti essendo $f(x)$ funzione limitata in $[a,b]$ avremo che

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in [a,b]\} \equiv m \in \mathbb{R}.$$

e che $m \leq f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Inoltre, dalla definizione di estremo inferiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $m + \frac{1}{n}$ non è minorante di $\{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}$ e dunque che esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $m \leq f(x_n) \leq m + \frac{1}{n}$. Essendo $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, dal Teorema dei carabinieri otteniamo che $f(x_n) \to m$ per $n \to +\infty$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è continua in $(0,1]$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ma $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ è convergente.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ esiste $\delta \in (0,1)$ tale che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in (0,\delta]$ e dunque $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ per ogni $x \in (0,\delta]$. Dal criterio del confronto segue allora che $\int_0^\delta \frac{f(x)}{x}\, dx$ è divergente e dunque sarà tale anche $\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\, dx$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è continua in $(0,1]$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ma $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ è divergente.

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 08/09/2008

(1) Fornire la definizione di massimo, di maggiorante e di estremo superiore di un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di monotonia.

(3) Sia $f(x)$ funzione definita e monotona in $[a, b]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ è continua in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $f(x)$ ammette al più discontinuità di prima specie. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[1, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ diverge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

SOLUZIONE

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo la funzione monotona nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, avremo $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$ se $f(x)$ risulta crescente mentre $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ per ogni $x \in [a,b]$ se $f(x)$ risulta decrescente .

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione parte intera $f(x) = [x]$ nell'intervallo $[0,2]$ è monotona crescente ma presenta una discontinuità in $x_0 = 1$ essendo

$$\lim_{x\to 1^-} [x] = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} [x].$$

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera, infatti essendo $f(x)$ funzione monotona e limitata in $[a,b]$, dal Teorema sul limite di funzioni monotone si ha che per ogni $x_0 \in [a,b]$ esistono finiti i limiti $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x)$. Inoltre, supponendo ad esempio la funzione crescente, si ha che

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a,x_0]\leq f(x_0) \leq \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_0,b] = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Quindi se x_0 risultasse punto di discontinuità si avrebbe $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ e dunque una discontinuità di prima specie.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $[1,+\infty)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ è divergente.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| < M$ per ogni $x > M$ e dunque $|\frac{f(x)}{x^2}| < \frac{M}{x^2}$ per ogni $x > M$. Dal criterio del confronto segue allora che $\int_M^{+\infty} |\frac{f(x)}{x^2}|\, dx$ è convergente, quindi $\int_M^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$ risulta convergente e dunque sarà tale anche $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $[1,+\infty)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ mentre $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ risulta convergente.