Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 18/12/2006

(1) Fornire la definizione di derivata ed il suo significato geometrico.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di integrabilità e fornire un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

(3) Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funzioni infinitesime per $x \to x_0$ tali che $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) \sim h(x)$ per $x \to x_0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x) \sim h(x)$ per $x \to x_0$. Vero Falso

B. $f(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$. Vero Falso

C. $f(x) + h(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ Vero Falso

(4) Sia $f(x)$ una funzione continua e limitata in $[1, +\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ è divergente. Vero Falso

B. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ è convergente. Vero Falso

C. $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_1^{x} f(t)\,dt \to 0$ per $x \to +\infty$ Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa e $\boxed{\textbf{B}}$ è vera. Infatti, essendo $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) \sim h(x)$ per $x \to x_0$, dalla definizione di "o" piccolo e dalle proprietà della relazione di asintotico risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Quindi $f(x) = o(h(x))$ e $f(x) \not\sim h(x)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, dalla definizione di "o" piccolo e della relazione di asintotico si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)} = 1$$

e dunque $f(x) + h(x) \sim g(x)$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua e limitata in $[1, +\infty)$ mentre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ risulta convergente.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ limitata in $[1, +\infty)$, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [1, +\infty)$. Si ha allora che

$$0 \leq \frac{|f(x)|}{x^2} \leq \frac{M}{x^2}, \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

Essendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ convergente, dal criterio del confronto segue che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x^2}\, dx$ converge e dunque, dal criterio di convergenza assoluta, anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$ converge..

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ limitata in $[1, +\infty)$, esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [1, +\infty)$. Dalla proprietà del confronto degli integrali definiti risulta

$$\frac{m(x-1)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \int_1^x f(t)\, dt \leq \frac{M(x-1)}{x^2}, \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

Essendo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x-1)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{M(x-1)}{x^2} = 0$, dal Teorema dei carabinieri si ottiene che anche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \int_1^x f(t)\, dt = 0$.

In alternativa, posto $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $F(x)$ è derivabile in $(1, +\infty)$ con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (1, +\infty)$. Dal Teorema di De L'Hopital, essendo $f(x)$ limitata, risulta allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x} = 0.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9/01/2007

(1) Dare la definizione di funzione continua, classificare le discontinuità e fornire i relativi esempi.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto (Teorema dei "carabinieri") per limiti di successioni.

(3) Sia $f(x)$ una funzione continua, limitata e positiva in $[0, +\infty)$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ per ogni $x \geq 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è limitata in $[0, +\infty)$. Vero Falso

B. Esiste $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. Vero Falso

C. $F(x)$ è convessa in $(0, +\infty)$. Vero Falso

(4) Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata strettamente crescente e tale che $f'(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $x = 0$ è punto di minimo per $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Vero Falso

B. $f(x)$ non ammette massimo in $\mathbb{R}$. Vero Falso

C. $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \in \mathbb{R}$. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = 1$, continua, positiva e limitata in $[0, +\infty)$. Si ha $F(x) = \displaystyle\int_0^x dt = x$, funzione non limitata in $[0, +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $F(x)$ è derivabile con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x > 0$. Essendo per ipotesi $f(x)$ positiva, avremo che $F(x)$ risulta strettamente crescente e quindi che esiste il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup_{x\geq 0} F(x)$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = e^{-x}$ è continua, limitata e positiva in $[0, +\infty)$ mentre $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$ è concava in $(0, +\infty)$ (infatti $F''(x) = -e^x < 0$).

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f'(x)$ strettamente crescente con $f'(0) = 0$, avremo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$. Ne segue allora che $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
In alternativa, si osservi che essendo $f'(x)$ strettamente crescente, la funzione risulta convessa in $\mathbb{R}$ e per ogni $x_0, x \in \mathbb{R}$ avremo $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. In particolare, essendo $f'(0) = 0$, avremo $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, per quanto provato nel punto B, $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$ e $x = 0$ è punto di minimo. Essendo la funzione derivabile in tutto $\mathbb{R}$, non esisteranno altri punti stazionari per $f(x)$ in $\mathbb{R}$ e quindi, dal Teorema di Fermat, deduciamo che $f(x)$ non ammette punti di massimo in $\mathbb{R}$.
In alternativa, si osservi che essendo $f'(x)$ strettamente crescente, la funzione risulta strettamente convessa in $\mathbb{R}$ e per ogni $x_0 \neq x$ avremo $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Se per assurdo esistesse $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di massimo, dal Teorema di Fermat avremo $f'(x_0) = 0$ e dunque $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \neq x_0$, una contraddizione.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Infatti la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile con derivata strettamente crescente e $f'(0) = 0$ ma $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 19/03/2007

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Sia (a_n) successione positiva e convergente e sia (b_n) successione infinitesima. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $(a_n b_n)$ è limitata. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $(\frac{b_n}{a_n})$ è limitata. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $(a_n^{b_n})$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. l'equazione $f(x) = 0$ non ammette soluzioni. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. l'equazione $f(x) = 0$ ammette al più una soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Essendo (a_n) successione convergente, (a_n) risulta limitata. Poichè (b_n) è infinitesima, il prodotto $(a_n b_n)$ sarà successione infinitesima e dunque limitata.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. La successione $b_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima, la successione $a_n = \frac{1}{n^2}$ è positiva e convergente ma $\frac{b_n}{a_n} = n$ è divergente.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la successione $a_n = e^{-n^2}$ è positiva e convergente, la successione $b_n = -\frac{1}{n}$ è infinitesima ma $a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n} = e^n$ è divergente.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Infatti, $f(x) = x$ è funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 1 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma $f(x) = 0$ ammette come soluzione $x_0 = 0$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti se per assurdo esistessero due soluzioni $a < b$ allora $f(x)$ risulterebbe continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) con $f(a) = f(b) = 0$. Dal Teorema di Rolle si avrebbe allora che esisterebbe $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$, in contraddizione con $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Infatti, $f(x) = e^x$ è funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma l'equazione $f(x) = 0$ non ammette soluzione.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 16/04/2007

(1) Fornire la definizione di funzione convessa ed enunciare i criteri di convessità.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema e la Formula fondamentale del calcolo integrale.

(3) Siano (a_n) e (b_n) successioni regolari tali che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $(a_n + b_n)$ è regolare. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $(a_n \cdot b_n)$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $(\frac{b_n}{a_n})$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ una funzione continua e decrescente in $[0, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è crescente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $F(x)$ è concava. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, poichè $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n(\frac{a_n}{b_n} + 1) = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

ed essendo (b_n) regolare ne segue che è tale anche $(a_n + b_n)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Le successioni $a_n = 1$ e $b_n = n$ sono regolari e tali che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}$ risulta infinitesima ma il prodotto $a_n \cdot b_n = n$ è divergente.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ sono regolari e tali che $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{n}$ risulta infinitesima mentre $\frac{b_n}{a_n} = \frac{n}{(-1)^n}$ non è divergente.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti essendo $f(x)$ decrescente, risulta

$$\inf_{x\in[0,+\infty)} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

e quindi $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha inoltre che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Dunque, dai criteri di monotonia, $F(x)$ risulta crescente.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera, infatti essendo $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$ e per ipotesi $f(x)$ decrescente, dai criteri di convessità si ottiene che $F(x)$ è concava in $(0, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Infatti, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è funzione continua e decrescente in $[0, +\infty)$ con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \arctan x$ è tale che $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 18/06/2007

(1) Fornire la definizione di integrale improprio su intervalli illimitati e provare che per ogni $p > 1$ l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ è convergente.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza dell'estremo superiore.

(3) Sia $f(x)$ funzione derivabile e convessa in $\mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è monotona in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) > 0$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $f(x)$ ammette minimo in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ una successione divergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\arctan(a_n)$ è convergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\sin(a_n)$ è indeterminata $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. e^{a_n} è divergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x^2$, derivabile e convessa in $I\!R$ ma non monotona su tutto $I\!R$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, poichè $f(x)$ è derivabile e convessa in $I\!R$ risulta $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x \in I\!R$. Essendo per ipotesi $f'(x_0) > 0$ si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = +\infty$ e dal Teorema del confronto si deduce che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = e^x$ è funzione derivabile e convessa ma non ammette minimo in $I\!R$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti essendo (a_n) divergente, potrà essere $a_n \to +\infty$ e dunque $\arctan(a_n) \to \frac{\pi}{2}$ oppure $a_n \to -\infty$ e quindi $\arctan(a_n) \to -\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la succesione $a_n = n\pi$ è divergente mentre $\sin(a_n) = 0$ è convergente.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Se $a_n \to -\infty$ allora e^{a_n} risulta convergente essendo $e^{a_n} \to 0$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 09/07/2007

(1) Fornire la definizione di integrale indefinito. Regole di integrazione per parti e per sotistuzione.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua e limitata in $[0,+\infty)$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ per ogni $x \in [0,+\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^2} = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ derivabile in $I\!R$ con $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Posto $g(x) = \sqrt{f(x)}$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $g(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. se $g(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$ allora $g'(0) = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = \cos x$, continua e limitata in $\mathbb{R}$ ma tale che $F(x) = \int_0^x \cos t \, dt = \sin x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = 1$ è continua e limitata in $\mathbb{R}$ ma $F(x) = \int_0^x dt = x$ è tale che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 1 \neq 0$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Infatti, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(x)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ con $F'(x) = f(x)$. Dal Teorema di de L'Höpital, essendo $f(x)$ limitata, risulta allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2x} = 0$$

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x^2$, derivabile con $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. La funzione $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ non risulta però derivabile in $x_0 = 0$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, osservato che risulta $g(0) = 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, abbiamo che $x_0 = 0$ è punto di minimo per $g(x)$ in $\mathbb{R}$. Dal Teorema di Fermat si ha allora che se $g(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$ allora $g'(0) = 0$.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 10/09/2007

(1) Fornire la definizione di derivata ed il suo significato geometrico.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di integrabilità delle funzioni monotone.

(3) Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ e $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq n_0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $\mathbb{R}$ con $f(0) = f'(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $x_0 = 0$ è punto di massimo o di minimo relativo. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2} \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Difatti, per definizione di o piccolo, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dalla definizione di limite si ottiene allora che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|\frac{a_n}{b_n}| \leq 1$ per ogni $n \geq n_0$ e quindi, essendo a_n e b_n positive, $a_n \leq b_n$ per $n \geq n_0$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = n$ e $b_n = n^2$ sono positive e tali che $\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^2$ con $n = o(n^2)$ ma $\lim_{n\to+\infty} n - n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^2(\frac{1}{n} - 1) = -\infty$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Infatti, essendo $a_n = o(b_n)$, dalla definizione di o piccolo otteniamo $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n(\frac{a_n}{b_n} + 1) = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x^3$, derivabile con $f(0) = f'(0) = 0$ ma tale che $x_0 = 0$ non è punto ne' di massimo ne' di minimo.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, per definizione di derivata, essendo $f(0) = f'(0) = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$$

Equivalentemente, essendo $f(x)$ derivabile, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ e per $x_0 = 0$ si ottiene $f(x) = o(x)$ ovvero $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa, la funzione $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ è derivabile in $\mathbb{R}$ con $f(0) = f'(0) = 0$ ma $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$.