Analisi Matematica 1

Prima prova scritta del 12/12/2005

(1) Fornire la definizione di funzione convessa ed illustrarne le principali proprietà.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale.

(3) Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, b)$ tale che $\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $[a, b)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ ammette minimo in $[a, b)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ due successioni positive e divergenti tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\log(a_n) \sim \log(b_n)$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\sin(a_n) \sim \sin(b_n)$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, sia

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a,b) \\ \ell & \text{se } x = b \end{cases}$$

Allora, essendo $\lim_{x\to b^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \ell = \tilde{f}(b)$, la funzione $\tilde{f}(x)$ risulta continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e quindi, dal Teorema di Weierstrass, esistono due costanti $m < M$ tali che $m \leq \tilde{f}(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. In particolare si ottiene che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b)$ e dunque che $f(x)$ è limitata in $[a,b)$.

In alternativa, dalla definizione di limite $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ si ottiene che esiste $\delta \in (0, b-a)$ tale che

$$\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1 \quad \forall x \in (b-\delta, b)$$

Essendo $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b-\delta]$, dal Teorema di Weierstrass, esistono $m < M$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b-\delta]$. Allora, posto $\tilde{M} = \max\{M, \ell+1\}$ e $\tilde{m} = \min\{m, \ell-1\}$, da quanto provato sopra otteniamo

$$\tilde{m} \leq f(x) \leq \tilde{M}, \quad \forall x \in [a,b)$$

e dunque che $f(x)$ è limitata in $[a,b)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = 1 - x$ risulta continua in $[0,1)$ con $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ma non ammette minimo in $[0,1)$ essendo $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1)$ e $\inf_{x\in[0,1)} f(x) = 0$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(b_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{a_n}{b_n}) + \log(b_n)}{\log(b_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{a_n}{b_n})}{\log(b_n)} + 1.$$

Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ mentre $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, ne segue che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{a_n}{b_n})}{\log(b_n)} = 0$ e dunque che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(b_n)} = 1$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Si considerino le due successioni positive e divergenti $a_n = 2\pi n$ e $b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$. Allora per $n \to +\infty$ si ha $a_n \sim b_n$ mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\sin(a_n) = 0$ e $\sin(b_n) = 1$, quindi $\sin(a_n) \not\sim \sin(b_n)$.

Analisi Matematica 1
Prima prova scritta del 09/01/2006

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[1, +\infty)$ tale che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ risulti convergente. Data $g(x)$ continua, positiva e limitata in $[1, +\infty)$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$ converge $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$ converge $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ una funzione continua in $I\!R$ tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in I\!R$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $I\!R$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ ammette minimo in $I\!R$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $g(x)$ positiva e limitata in $[1,+\infty)$, esiste $M > 0$ tale che $0 < g(x) \leq M$ per ogni $x \in [1,+\infty)$. Quindi la funzione $f(x)g(x)$ è continua in $[1,+\infty)$ e verifica

$$0 < f(x)g(x) \leq M f(x) \quad \forall x \in [1,+\infty)$$

Allora, essendo per ipotesi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente, dal criterio del confronto si ottiene che anche $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge.
Alcune osservazioni su errori frequenti. Non è vero che essendo $g(x)$ continua, positiva e limitata in $[1,+\infty)$, $g(x)$ risulta integrabile in senso improprio in $[1,+\infty)$ (si pensi alla funzione costante $g(x) = 1$).
Non è vero che se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ risultano convergenti allora anche $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ risulta convergente.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Si considerino le funzioni $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, $g(x)$ risulta continua, positiva e limitata in $[1,+\infty)$ ma $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Dalla definizione di limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ si ottiene che esiste $L > 0$ tale che

$$\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1 \quad \forall |x| > L$$

Essendo $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-L, L]$, dal Teorema di Weierstrass, esistono $m < M$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [-L, L]$. Allora, posto $\tilde{M} = \max\{M, \ell+1\}$ e $\tilde{m} = \min\{m, \ell-1\}$, da quanto provato sopra otteniamo

$$\tilde{m} \leq f(x) \leq \tilde{M}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e dunque che $f(x)$ è limitata in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Tale funzione risulta continua in $\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ma non ammette minimo in $\mathbb{R}$.

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 20/03/2006

(1) Fornire la definizione di integrale improprio su intervalli illimitati ed enunciare il criterio del confronto per tali integrali.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Sia $f(x)$ una funzione limitata in $[0,1]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è integrabile in $[0,1]$ — Vero / Falso

B. $f(x)$ ammette minimo in $[0,1]$ — Vero / Falso

C. la successione $a_n = f(\frac{1}{n})$ è convergente — Vero / Falso

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $x_0 = 0$. Posto $g(x) = |f(x)|$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $g(x)$ è continua in $x_0 = 0$ — Vero / Falso

B. $g(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$ — Vero / Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa, si pensi alla funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

funzione limitata ma non integrabile in $[0, 1]$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

è limitata ma non ammette minimo essendo $\inf_{x \in [0,1]} = 0$ ma $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la funzione limitata

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2x} & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Allora la successione

$$a_n = f(\frac{1}{n}) = \sin(\frac{\pi}{2} n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è limitata ma non ammette limite per $n \to +\infty$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ derivabile in x_0, $f(x)$ risulterà continua in x_0. Inoltre essendo la funzione $|x|$ funzione continua in $\mathbb{R}$, otteniamo che la funzione composta $g(x) = |f(x)|$ risulta anch'essa continua in x_0.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Considerata ad esempio la funzione $f(x) = x^2$, derivabile in $x_0 = 0$, si ha che $g(x) = |f(x)| = x^2$ è derivabile in $x_0 = 0$.

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 11/04/2006

(1) Fornire la definizione di massimo relativo per una funzione. Fornire una condizione necessaria e una condizione sufficiente all'esistenza di un tale massimo.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di integrabilità delle funzioni monotone.

(3) Siano (a_n) e (b_n), (c_n) tre successioni reali tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. se (a_n) e (c_n) sono regolari allora (b_n) è regolare. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. se (a_n) e (c_n) sono limitate allora (b_n) è limitata. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funzioni definite e positive in $(0, +\infty)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Supposto che $f(x) = o(h(x))$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to +\infty$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $M > 0$ tale che $f(x) + g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \geq M$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa, basta pensare alle successioni $a_n = -1$, $b_n = (-1)^n$ e $c_n = 1$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti essendo (a_n) e (c_n) limitate, esistono $M_a,\ M_c \in I\!R$ tali che $|a_n| \leq M_a$ e $|c_n| \leq M_c$ per ogni $n \in I\!N$. Si ottiene allora che $-M_a \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq M_c$ per ogni $n \in I\!N$ e quindi che (b_n) risulta limitata.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo per ipotesi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

dalla definizione di limite, preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esistono $M_1,\ M_2 > 0$ tali che $\frac{f(x)}{h(x)} < \frac{1}{2}$ per ogni $x > M_1$ e $\frac{g(x)}{h(x)} < \frac{1}{2}$ per ogni $x > M_2$. Allora, posto $M = \max\{M_1, M_2\}$, per ogni $x > M$ si avra' $\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} < 1$ e dunque $f(x) + g(x) < h(x)$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. E' sufficiente considerare ad esempio le funzioni $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

ANALISI MATEMATICA 1
PRIMA PROVA SCRITTA DEL 20/06/2006

(1) Fornire la definizione ed un esempio di insieme superiormente limitato, di insieme inferiormente limitato e di insieme limitato.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di monotonia per funzioni derivabili.

(3) Sia $f(x)$ una funzione continua in $[-1, 1]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è derivabile in ogni $x_0 \in (-1, 1)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ è limitata in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. la successione $a_n = f(\frac{1}{n})$ è convergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile e convessa in $\mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è monotona in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa, basta considerare la funzione $f(x) = |x|$, continua in $[-1, 1]$ ma non derivabile in $x_0 = 0$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Essendo la funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$, dal Teorema di Weierstrass, esistono $x_1,\ x_2 \in [-1, 1]$ punti di massimo e di minimo per $f(x)$ in $[-1, 1]$. Posto $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$, risulta allora $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [-1, 1]$ e quindi $f(x)$ limitata in $[-1, 1]$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Essendo la funzione continua nel punto $x_0 = 0$, dalla definizione di funzione continua e dal Teorema "ponte" tra i limiti di funzione e di successione, si ha che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0)$ per ogni successione $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$. In particolare, essendo $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, avremo che esiste $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ è convessa ma non monotona in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, dalla definizione di funzione convessa, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) > 0$, dalla precedente diseguaglianza e dal Teorema del confronto, essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = +\infty$ otteniamo che esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Se invece $f'(x_0) \leq 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ avremo che $f(x)$ risulta decrescente in $\mathbb{R}$ e quindi esisterà $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{\mathbb{R}} f(x)$.

Analisi Matematica 1
Prima prova scritta del 10/07/2006

(1) Fornire la formula di derivazione della funzione inversa e provare che $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno.

(3) Sia $f(x)$ una funzione continua, positiva e strettamente decrescente in $[1, +\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette massimo in $[1, +\infty)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste finito $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive e regolari tali che $\lim_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\log(a_n) \sim \log(b_n)$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo la funzione decrescente in $[1, +\infty)$, risulta $f(1) \geq f(x)$ per ogni $x \geq 1$. Dunque $x = 1$ è punto di massimo assoluto per $f(x)$ in $[1, +\infty)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Essendo la funzione decrescente in $[1, +\infty)$ abbiamo che esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{x\in[1,+\infty)} f(x).$$

Essendo per ipotesi la funzione positiva, abbiamo inoltre che $\inf\limits_{x\in[1,+\infty)} f(x) \geq 0$ e dunque che il limite è finito.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua, positiva e strettamente decrescente in $[1, +\infty)$ mentre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ risulta divergente.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si considerino ad esempio le successioni regolari $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Si ha che $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ mentre $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, dal limite notevole $e^{x_n} \to 1$ per ogni successione $x_n \to 0$, si ha che $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} \to 1$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Le successioni regolari $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sono tali che $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ mentre, dal limite notevole $\log(1 + x_n) \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, otteniamo $\frac{\log(a_n)}{\log(b_n)} \sim n \to +\infty$

Analisi Matematica 1
Prima prova scritta del 18/09/2006

(1) Fornire la definizione di estremo superiore, la sua caratterizzazione ed enunciare il Teorema che ne garantisce l'esistenza.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(3) Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $x = 0$ con $f(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive tali che la successione somma $(a_n + b_n)$ risulti convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. (a_n) e (b_n) sono convergenti. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. (a_n) e (b_n) sono limitate. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo la funzione derivabile in $x = 0$ risulta anche continua in tale punto e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \sin x$ è derivabile in $x = 0$ con $f(0) = 0$ mentre $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = 1 + (-1)^n$ e $b_n = 1 - (-1)^n$ non sono regolari mentre si ha che $a_n + b_n = 2$, per ogni $n \in I\!N$, e dunque che $(a_n + b_n)$ è convergente.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $(a_n + b_n)$ successione convergente, abbiamo che esiste $M > 0$ tale che $a_n + b_n \leq M$ per ogni $n \in I\!N$. Poichè (a_n) e (b_n) sono positive, se ne deduce che $0 < a_n < a_n + b_n \leq M$ e $0 < b_n < a_n + b_n \leq M$ per ogni $n \in I\!N$ e dunque che (a_n) e (b_n) sono limitate.