Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 16/01/2016

(1) In campo complesso, la somma delle radici quarte di -2 vale

$\boxed{\text{a}}$ 0
$\boxed{\text{b}}$ $\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)$
$\boxed{\text{c}}$ $2\sqrt[4]{2}\,i$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \cosh(x^\alpha) & \text{per } x > 0 \\ \cos(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha > \frac{1}{2}$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f_\alpha(x) = e^{x^2} + \alpha e^{-x^2}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{a}}$ ammette punti di massimo relativo
$\boxed{\text{b}}$ è crescente in $[0, +\infty)$
$\boxed{\text{c}}$ ha immagine $[0, +\infty)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - \cos(\alpha x)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 xe^{|2x-1|}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{e-1}{2}$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{4}{2e-1}$
$\boxed{\text{c}}$ $2(e+1)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(6) L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n} \log n}$ è

$\boxed{\text{a}}$ $[-2, 2]$
$\boxed{\text{b}}$ $[-2, 2)$
$\boxed{\text{c}}$ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti le radici quarte di $\alpha = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$ sono date da $z_k = \sqrt[4]{2}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove $\theta_k = \frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, e dunque:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, i),\\
z_1 &= \sqrt{2}(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, i),\\
z_2 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, i),\\
z_3 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, i).
\end{aligned}$$

Ne segue che $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(\beta x) = 1 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Osservato che per $x \to 0^+$ risulta $x^\alpha \to +\infty$ se $\alpha < 0$, $x^\alpha \to 1$ se $\alpha = 0$ e $x^\alpha \to 0$ se $\alpha > 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cosh(x^\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ \cosh 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > 0$, qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$.
Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = -\beta\sin(\beta x)$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$.
Riguardo alla derivata destra, per $\alpha > 0$, ricordando che $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, dato che $x^\alpha \to 0$ per $x \to 0^+$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(x^\alpha) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^{2\alpha}}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2\alpha-1}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$ se $\alpha > \frac{1}{2}$ e $f'_+(0) = \frac{1}{2}$ se $\alpha = \frac{1}{2}$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > \frac{1}{2}$, qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione $f_\alpha(x) = e^{x^2} + \alpha e^{-x^2}$ risulta definita e continua in $\mathbb{R}$. La funzione risulta inoltre funzione pari e potremo limitarne lo studio all'intervallo

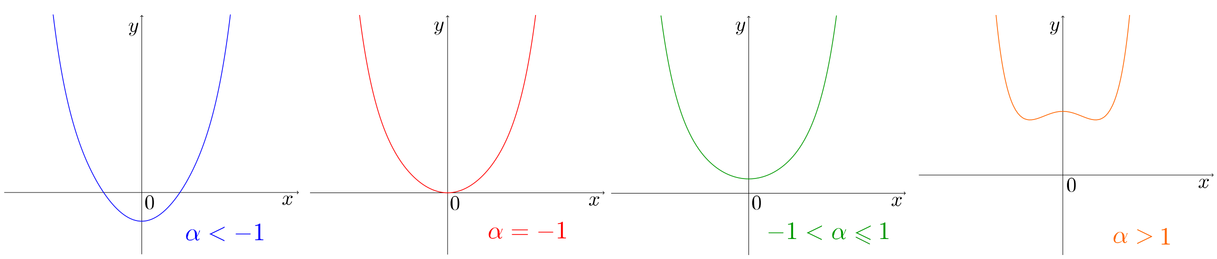
$[0,+\infty)$. Abbiamo che $f_\alpha(0) = 1+\alpha$ e che $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$, $\forall \alpha \in I\!R$. La funzione risulta derivabile in ogni $x \in I\!R$ con

$$f'_\alpha(x) = 2xe^{x^2} - 2\alpha x e^{-x^2} = 2x(e^{x^2} - \alpha e^{-x^2}) = \frac{2x}{e^{x^2}}\left(e^{2x^2} - \alpha\right)$$

Nell'intervallo $[0,+\infty)$ avremo dunque che

$$f'_\alpha(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x^2} - \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x^2} > \alpha$$

Poiché $e^{2x^2} > 1$ per ogni $x \in (0,+\infty)$, se $\alpha \le 1$ allora $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0,+\infty)$ e dunque che $f_\alpha(x)$ risulta strettamente crescente in $[0,+\infty)$. Dalla simmetria della funzione ne deduciamo allora che se $\alpha \le 1$ allora $f_\alpha(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0,+\infty)$. Abbiamo quindi che in questo caso la funzione non ammette punti di massimo relativo e $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Osserviamo inoltre che $x = 0$ risulta punto di minimo assoluto per $f_\alpha(x)$ con$f_\alpha(0) = 1+\alpha$.
Se invece $\alpha > 1$ allora in $[0,+\infty)$ risulta $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt{\log\sqrt{\alpha}} = x_\alpha$, dunque $f_\alpha(x)$ risulta strettamente crescente in $[x_\alpha, +\infty)$, strettamente decrescente in $[0, x_\alpha]$, quindi $\boxed{\text{b}}$ è falsa. Osserviamo inoltre che x_α è punto di minimo relativo per $f_\alpha(x)$ con $f_\alpha(x_\alpha) = e^{\log\sqrt{\alpha}} + \alpha e^{-\log\sqrt{\alpha}} = 2\sqrt{\alpha} > 0$ mentre $x = 0$ risulta punto di massimo relativo con $f_\alpha(0) = \alpha + 1$.
Dal Teorema dei valori intermedi la funzione ha quindi immagine $[2\sqrt{\alpha}, +\infty)$ se $\alpha > 1$ e $[1+\alpha, +\infty)$ se $\alpha \le 1$. Ne deduciamo che l'immagine non è $[0,+\infty)$ eccetto che per $\alpha = -1$ e quindi anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa.



(4) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x} &= 1 + \tfrac{1}{2}(\cos x - 1) - \tfrac{1}{8}(\cos x - 1)^2 + o((\cos x - 1)^2)\\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} + o(x^4)) - \tfrac{1}{8}(-\tfrac{x^2}{2} + o(x^2))^2 + o((-\tfrac{x^2}{2} + o(x^2))^2)\\ &= 1 - \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^4}{48} - \tfrac{1}{8}(\tfrac{x^4}{4} + o(x^4)) + o(x^4) = 1 - \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^4}{96} + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}f_\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - \cos(\alpha x) &= 1 - \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^4}{96} + o(x^4) - (1 - \tfrac{\alpha^2 x^2}{2} + \tfrac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4)\\ &= (\tfrac{\alpha^2}{2} - \tfrac{1}{4})x^2 - (\tfrac{1}{96} + \tfrac{\alpha^4}{24})x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Quindi $f_\alpha(x)$ avrà ordine di infinitesimo uguale a 2 per ogni $\alpha \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e a 4 per $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(5) La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, dalla proprietà di additività dell'integrale abbiamo

$$\int_0^1 xe^{|2x-1|}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{1-2x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 xe^{2x-1}dx$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{1-2x}dx = \left[-\tfrac{1}{2}xe^{1-2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x}dx = \left[-\tfrac{1}{2}xe^{1-2x} - \tfrac{1}{4}e^{1-2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{e}{4}$$

e

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 xe^{2x-1}dx = \left[\tfrac{1}{2}xe^{2x-1}\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2x-1}dx = \left[\tfrac{1}{2}xe^{2x-1} - \tfrac{1}{4}e^{2x-1}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \tfrac{e}{4}$$

Ne segue che

$$\int_0^1 xe^{|2x-1|}dx = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{e}{4} + \tfrac{e}{4} = \tfrac{1}{2}(e-1)$$

(6) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Dal Metodo del rapporto di D'Alembert abbiamo che il raggio di convergenza della serie è $\rho = 2$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\sqrt{n}\log n}{2^{n+1}\sqrt{n+1}\log(n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue allora che la serie converge per $|x| < 2$ e non converge per $|x| > 2$. Per $x = 2$ abbiamo che la serie diverge essendo la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}\log n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ divergente. Infatti risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} = +\infty$$

ed essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente, dal criterio del confronto asintotico si ha che anche la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ diverge. Per $x = -2$ abbiamo invece che la serie converge dato che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}\log n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\log n}$ converge per il criterio di Leibniz: infatti la successione $\frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ risulta infinitesima e decrescente.
Ne concludiamo che l'intervallo di convergenza della serie di potenze data è $[-2, 2)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11/02/2016

(1) In campo complesso, la somma delle radici terze di $3i$ vale

a) 0
b) $\sqrt[3]{3}$
c) $2\sqrt[3]{3}\,i$
d) nessuna delle precedenti

(2) La successione $a_n = \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n!}\right) n^n}{\alpha^{n^2}}$ risulta convergente

a) per ogni $\alpha > 0$
b) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
c) solo per $\alpha > 1$
d) nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f_\alpha(x) = x\sqrt{1+\alpha x^2} - \log(x+\sqrt{1+x^2})$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

a) 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b) maggiore di 3 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
c) 3 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
d) nessuna delle precedenti

(4) L'equazione $(x^2-1)^2 e^{-x} = \alpha$ ammette solo due soluzioni

a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
c) solo per $\alpha > 0$
d) nessuna delle precedenti

(5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x\sqrt{x}}\,dx$ vale

a) 2
b) $+\infty$
c) $2\log 2$
d) nessuna delle precedenti

(6) La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n^\alpha \left(e^{-\frac{1}{2n}} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge

a) per ogni $\alpha > 0$
b) solo se $\alpha < 1$
c) per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
d) nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti le radici terze di $3i = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ sono date da $z_k = \sqrt[3]{3}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove $\theta_k = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} = \frac{\pi+4k\pi}{6}$, $k = 0, 1, 2$, e dunque:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{3}(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt[3]{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\, i),\\
z_1 &= \sqrt[3]{3}(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \sqrt[3]{3}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\, i),\\
z_2 &= \sqrt[3]{3}(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}) = \sqrt[3]{3}(-\, i).
\end{aligned}$$

Ne segue che $z_0 + z_1 + z_2 = 0$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, limitandoci a considerare il caso $\alpha > 0$, osserviamo innanzitutto che dai limiti notevoli per $n \to +\infty$ risulta

$$a_n = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n!}\right) n^n}{\alpha^{n^2}} \sim \frac{n^n}{n!\ \alpha^{n^2}} = b_n$$

e che per $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\ \alpha^{(n+1)^2}} \cdot \frac{n!\ \alpha^{n^2}}{n^n}\\
&= \frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{1}{\alpha^{2n+1}} \sim \frac{e}{\alpha^{2n+1}} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1\\ e & \text{se } \alpha = 1\\ 0 & \text{se } \alpha > 1\end{cases}
\end{aligned}$$

Dal Criterio del rapporto deduciamo che la successione $(b_n)_{n\in I\!N}$, e quindi anche la successione $(a_n)_{n\in I\!N}$, converge se e solo se $\alpha > 1$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per ogni $\alpha \in I\!R$, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
\log(x + \sqrt{1+x^2}) &= \log(x + 1 + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)) = \log(1 + (x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))\\
&= x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)) - \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))^2\\
&\quad + \tfrac{1}{3}(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))^3 + o((x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))^3)\\
&= x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)) - \tfrac{1}{2}(x^2 + x^3 + o(x^3)) + \tfrac{1}{3}(x^3 + o(x^3))\\
&= x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

mentre

$$x\sqrt{1+\alpha x^2} = x(1 + \tfrac{\alpha x^2}{2} + o(x^2)) = x + \tfrac{\alpha}{2}x^3 + o(x^3)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= x\sqrt{1+\alpha x^2} - \log(x + \sqrt{1+x^2})\\
&= (x + \tfrac{\alpha}{2}x^3 + o(x^3)) - (x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3))\\
&= (\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{6})x^3 + o(x^3) = \tfrac{1}{6}(3\alpha + 1)x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha \neq -\frac{1}{3}$ allora $f_\alpha(x)$ ha ordine di infinitesimo 3 mentre se $\alpha = -\frac{1}{3}$ allora $f_\alpha(x) = o(x^3)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo maggiore di 3.

(4) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Per determinare le soluzioni dell'equazione data, studiamo la funzione $f(x) = (x^2-1)^2 e^{-x}$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

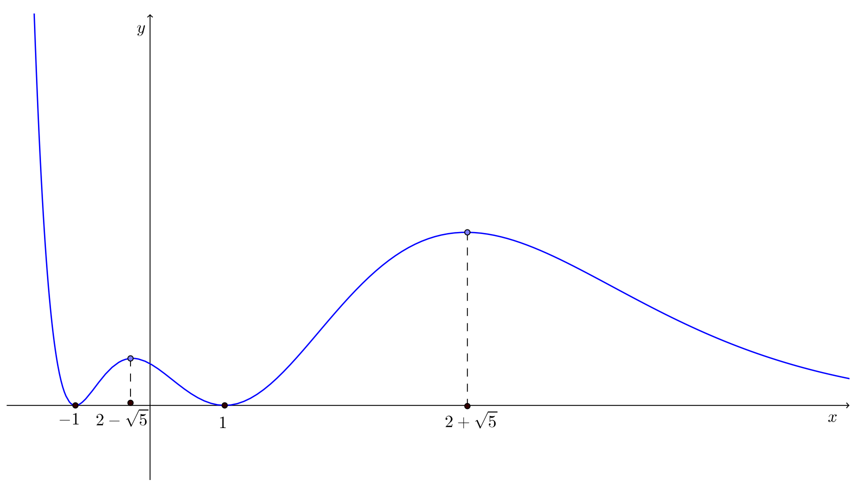
La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con

$$f'(x) = (x^2-1)(4x - x^2 + 1)e^{-x} = -(x^2-1)(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})e^{-x}$$

Osservato che $2+\sqrt{5} > 1$ e $-1 < 2-\sqrt{5} < 0$, otteniamo che

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2-\sqrt{5} \text{ oppure } 1 < x < 2+\sqrt{5}$$

Ne segue che $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$, $[2-\sqrt{5}, 1]$ e $[2+\sqrt{5}, +\infty)$, strettamente crescente in $[-1, 2-\sqrt{5}]$ e $[1, 2+\sqrt{5}]$, i punti $x = \pm 1$ risultano punti di minimo assoluto con $f(\pm 1) = 0$ (osserviamo difatti che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) mentre i punti $x = 2\pm\sqrt{5}$ risultano punti di massimo relativo con $f(2\pm\sqrt{5}) = 4(2\pm\sqrt{5})e^{-(2\pm\sqrt{5})}$.



Dal Teorema dei valori intermedi abbiamo quindi che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette solo due soluzioni per $\alpha = 0$ e per $\alpha = f(2+\sqrt{5})$. Quindi $\boxed{\text{a}}$, $\boxed{\text{b}}$ e $\boxed{\text{c}}$ sono false.

(5) La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Dalla definizione di integrale improprio abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x + x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x + x\sqrt{x}}\,dx$$

Per calcolare $\int_1^b \frac{1}{x+x\sqrt{x}}\,dx$ osserviamo che operando la sostituzione $t=\sqrt{x}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{x+x\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^b \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}\,dx = \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2t}{t^2(1+t)}dt = 2\int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}dt \\ &= 2\left[\log t - \log(1+t)\right]_1^{\sqrt{b}} = 2\left[\log\tfrac{t}{1+t}\right]_1^{\sqrt{b}} = 2\left(\log\tfrac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}} - \log\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} 2\left(\log\tfrac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}} - \log\tfrac{1}{2}\right) = -2\log\tfrac{1}{2} = 2\log 2$$

(6) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Dagli sviluppi notevoli, per $n\to+\infty$, abbiamo

$$\begin{aligned}e^{-\frac{1}{2n}} - \cos\tfrac{1}{\sqrt{n}} &= 1-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4n^2}+o(\tfrac{1}{n^2}) - (1-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{4!}\tfrac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})) \\ &= (\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{24})\tfrac{1}{n^2}+o(\tfrac{1}{n^2}) \sim \tfrac{1}{12}\tfrac{1}{n^2}\end{aligned}$$

e dunque che

$$n^\alpha\left(e^{-\frac{1}{2n}} - \cos\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \tfrac{1}{12}\tfrac{1}{n^{2-\alpha}}$$

Dato che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{1}{12}\tfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ converge se e solo se $2-\alpha>1$, ovvero $\alpha<1$, dal criterio del confronto asintotico possiamo concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha<1$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 17/02/2016

(1) Dati $z = 1 - i$ e $w = -2 + i$, abbiamo che $z^4 \cdot w$ è uguale a

[a] $4i$ [b] $3 + 2i$
[c] $8 - 4i$ [d] nessuna delle precedenti

(2) La successione $a_n = n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \log(\frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})\right)$ per $n \to +\infty$ risulta convergente

[a] per ogni $\alpha > 0$ [b] per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
[c] solo se $\alpha < 3$ [d] nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(\cos x) + x^2\sqrt{1+\alpha x}}{x^2} & \text{per } x > 0 \\ \beta \cosh x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

[a] non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ [b] è continua per $\alpha = 0$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$
[c] è derivabile solo per $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$ [d] nessuna delle precedenti

(4) L'equazione $\arctan \dfrac{x+1}{x-1} = \alpha x$ ammette

[a] un'unica soluzione per ogni $\alpha > 0$ [b] nessuna soluzione per qualche $\alpha > 0$
[c] due soluzioni per ogni $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ [d] nessuna delle precedenti

(5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 x \log(2x - x^2)\, dx$ vale

[a] $\frac{1}{2} - \log 2$ [b] $+\infty$
[c] $2 \log 2$ [d] nessuna delle precedenti

(6) La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n} \log(1 + \tfrac{1}{n!}) x^n$ ha insieme di convergenza

[a] $\mathbb{R}$ [b] $[-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}]$
[c] $\{0\}$ [d] nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osservato che $z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, dalla formula di De Moivre otteniamo che

$$z^4 = (\sqrt{2})^4(\cos(-\pi) + i(\sin(-\pi)) = -4$$

e quindi

$$z^4 \cdot w = -4(-2+i) = 8 - 4i.$$

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
\log(x + \sqrt{1+x^2}) &= \log(x + 1 + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)) = \log(1 + (x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3))) \\
&= x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))^2 \\
&\qquad + \tfrac{1}{3}(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))^3 + o((x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)))^3) \\
&= x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}(x^2 + x^3 + o(x^3)) + \tfrac{1}{3}(x^3 + o(x^3)) \\
&= x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$ otteniamo allora

$$\tfrac{1}{n} - \log\left(\tfrac{1}{n} + \sqrt{1 + \tfrac{1}{n^2}}\right) = \tfrac{1}{n} - (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{n^3} + o(\tfrac{1}{n^3}) = \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{n^3} + o(\tfrac{1}{n^3}) \sim \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{n^3}$$

da cui

$$a_n = n^\alpha\left(\tfrac{1}{n} - \log\left(\tfrac{1}{n} + \sqrt{1 + \tfrac{1}{n^2}}\right)\right) \sim \tfrac{1}{6}\tfrac{n^\alpha}{n^3} = \tfrac{n^{\alpha-3}}{6} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}$$

Quindi la successione risulta convergente se e solo se $\alpha \leq 3$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \beta\cosh x = \beta = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $x^2\sqrt{1+\alpha x} = x^2(1 + \frac{\alpha x}{2} + o(x)) = x^2 + \frac{\alpha x^3}{2} + o(x^3)$ e $\log(\cos x) = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + o((\cos x - 1)^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, si ottiene

$$\log(\cos x) + x^2\sqrt{1+\alpha x} = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) + x^2 + \frac{\alpha x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{2} + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x) + x^2\sqrt{1+\alpha x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{2} + o(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

per ogni $\alpha \in I\!R$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\beta = \frac{1}{2}$.
Per $\beta = \frac{1}{2}$, riguardo alla derivabilità, abbiamo che $f(x)$ risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \frac{1}{2}\sinh x$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\sinh x = 0.$$

Quindi, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$.
Riguardo alla derivata destra, dal precedente sviluppo risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(\cos x) + x^2\sqrt{1+\alpha x}}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x) + x^2\sqrt{1+\alpha x} - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{\alpha}{2}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = \frac{\alpha}{2}$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

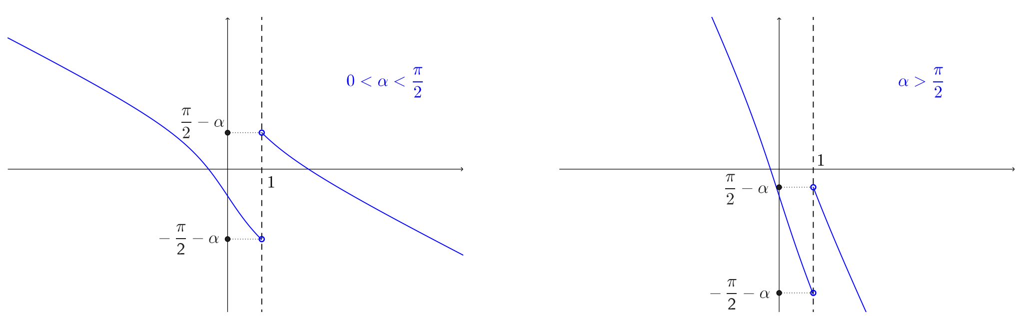
(4) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Per determinare le soluzioni dell'equazione data, studiamo la funzione $f_\alpha(x) = \arctan\frac{x+1}{x-1} - \alpha x$ limitandoci a considerare il caso $\alpha > 0$. La funzione risulta definita e continua in $I\!R \setminus \{1\}$ con

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty \text{ e } \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Osserviamo che risulta $-\frac{\pi}{2} - \alpha < 0$ per ogni $\alpha > 0$ mentre $\frac{\pi}{2} - \alpha > 0$ se e solo se $\alpha < \frac{\pi}{2}$.
La funzione risulta derivabile in ogni $x \in I\!R \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} - \alpha = -\frac{1}{x^2+1} - \alpha$$

Per $\alpha > 0$, essendo $\frac{1}{x^2+1} > 0$ per ogni $x \in I\!R$, avremo allora che $f'_\alpha(x) < 0$ per ogni $x \neq 1$ e quindi che $f_\alpha(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$.



Dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia stretta abbiamo quindi che l'equazione $f_\alpha(x) = 0$ ammette due soluzioni per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, una sola soluzione per $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. Quindi $\boxed{\text{c}}$ è vera.

(5) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Dalla definizione di integrale improprio abbiamo

$$\int_0^1 x\log(2x-x^2)\,dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 x\log(2x-x^2)\,dx$$

Per calcolare $\displaystyle\int x\log(2x-x^2)\,dx$ osserviamo che integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int x\log(2x-x^2)\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(2x-x^2) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2-2x}{2x-x^2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x-x^2) - \int \frac{x(1-x)}{2-x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x-x^2) - \int x+1-\frac{2}{2-x}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x-x^2) - \frac{x^2}{2} - x - 2\log(2-x) + c\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\log(2x-x^2)\,dx &= \lim_{a\to0^+}\int_a^1 x\log(2x-x^2)\,dx\\ &= \lim_{a\to0^+}\left[\frac{x^2}{2}\log(2x-x^2) - \frac{x^2}{2} - x - 2\log(2-x)\right]_a^1\\ &= \lim_{a\to0^+} -\frac{3}{2} + \frac{a^2}{2}\log(2a-a^2) + \frac{a^2}{2} + a + 2\log(2-a) = -\frac{3}{2} + 2\log 2\end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Posto $a_n = n^{2n}\log(1+\frac{1}{n!})$, osservato che per $n\to+\infty$ $a_n \sim \frac{n^{2n}}{n!}$, abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot(n+1) \to +\infty$$

e quindi, dal metodo del rapporto, che il raggio di convergenza della serie è $\rho = 0$. Dalle proprietà del raggio di convergenza possiamo concludere che l'insieme di convergenza della serie di potenze è $I = \{0\}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11 giugno 2016

(1) Le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = 8$ **non** appartengono

$\boxed{a}$ al terzo quadrante del piano complesso
$\boxed{b}$ all'asse reale del piano complesso
$\boxed{c}$ all'asse immaginario del piano complesso
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

(2) L'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} - \sqrt{1+\alpha x^2}$ per $x \to 0$ è

$\boxed{a}$ 2 per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{b}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in I\!R$
$\boxed{c}$ 4 per qualche $\alpha \in I\!R$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x)-\cos(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0 \\ \cosh(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{a}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
$\boxed{b}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
$\boxed{c}$ è derivabile solo per $\alpha = -1$ e $\beta = 0$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

(4) L'equazione $2x^2 = \alpha + \sqrt{x}$ ammette due soluzioni

$\boxed{a}$ per ogni $\alpha \geq -\frac{3}{8}$
$\boxed{b}$ solo per $\alpha \geq 0$
$\boxed{c}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

(5) L'integrale $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$ vale

$\boxed{a}$ $\pi^2 - 4$
$\boxed{b}$ 2π
$\boxed{c}$ 0
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

(6) La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \log(1 - \tfrac{2}{n^2})$ ha insieme di convergenza

$\boxed{a}$ $I\!R$
$\boxed{b}$ $[-1, 1]$
$\boxed{c}$ $[-1, 1)$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9 luglio 2016

(1) Le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = -2i$ **non** appartengono

a al quarto quadrante del piano complesso
b all'asse reale del piano complesso
c all'asse immaginario del piano complesso
d nessuna delle precedenti

(2) L'ordine di infinitesimo della funzione $f_\alpha(x) = \sin x \cosh x - x\sqrt{1+\alpha x}$ per $x \to 0$ è

a 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
c 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
d nessuna delle precedenti

(3) La successione $a_n = n^2 \left(\sin^2 \frac{1}{n} - 2\log(1 + \frac{\alpha}{n^2})\right)$ per $n \to +\infty$ converge

a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b è solo se $\alpha \neq \frac{1}{2}$
c per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
d nessuna delle precedenti

(4) L'equazione $x = \log(\alpha x)$ con $\alpha \neq 0$ ammette soluzione

a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b per nessun $\alpha \neq 0$
c solo per $0 < \alpha < e$
d nessuna delle precedenti

(5) L'integrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 |\sin x|\, dx$ vale

a $\pi^2 - 4$
b 2π
c 0
d nessuna delle precedenti

(6) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\alpha n}}{(3n)!}$ converge

a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
c solo se $\alpha > 0$
d nessuna delle precedenti

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 10 settembre 2016

(1) Le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 + 4i = 0$ **non** appartengono

$\boxed{\text{a}}$ al primo quadrante del piano complesso
$\boxed{\text{b}}$ al terzo quadrante del piano complesso
$\boxed{\text{c}}$ all'asse immaginario del piano complesso
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2) La successione $a_n = n\log(1+n^\alpha) - n^2 \sin\frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ diverge a $-\infty$ per ogni $\alpha \leq 0$
$\boxed{\text{c}}$ converge a 0 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $g_\alpha(x) = \sin^2 x - \log(1+x^\alpha)$, $\alpha > 0$, per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ minore di 2 per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) L'equazione $\log|x-1| + \alpha x = 0$, con $\alpha > 0$, ammette una soluzione negativa

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) L'integrale $\displaystyle\int_0^\pi |\sin x - \tfrac{1}{2}| \cos x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{2}$
$\boxed{\text{b}}$ 2
$\boxed{\text{c}}$ 0
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(6) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^\alpha+n^2}}$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha < 2$
$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha \leq 0$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha > 4$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti