Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 gennaio 2012

**1)** La successione $a_n = n^{\alpha n} \log(1 + \dfrac{2^n}{n!})$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha < 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**2)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2)+\sin \alpha x}{x} & \text{per } x > 0 \\ \sqrt[3]{1+\beta x} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non è derivabile
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per $\alpha = 1$ e $\beta = 3$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**3)*** L'equazione $e^{x-\alpha} = x$, ammette una sola soluzione positiva

$\boxed{\text{a}}$ solo per $\alpha = 1$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha \geq 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**4)** L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $2 + \frac{3}{e}$
$\boxed{\text{b}}$ $2 - \frac{5}{e}$
$\boxed{\text{c}}$ $2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**5)*** L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log^2 x}{(x-1)^\alpha \sin \frac{1}{x}} dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $2 < \alpha < 3$
$\boxed{\text{b}}$ non converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha > 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

## Soluzione

**(1)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dalla gerachia degli infiniti, usando il limite notevole del logaritmo si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}\log(1+\frac{2^{n+1}}{(n+1)!})}{n^{\alpha n}\log(1+\frac{2^n}{n!})} \sim (\frac{n+1}{n})^{\alpha n}(n+1)^\alpha \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = 2(1+\frac{1}{n})^{\alpha n}(n+1)^{\alpha-1}$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 2e & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Dal Criterio del rapporto segue allora che la serie converge a 0 se $\alpha < 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

**(2)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{1+\beta x} = 1 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $\sin(\alpha x) = \alpha x + o(x^2)$ e $\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2)+\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha x + o(x)}{x} = \alpha$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$.
Riguardo alla derivabilità, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{x} = \frac{\beta}{3}$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \frac{\beta}{3}$.
Riguardo alla derivata destra, dagli sviluppi sopra per $\alpha = 1$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x^2)+\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2} = 1$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 1$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = 3$.

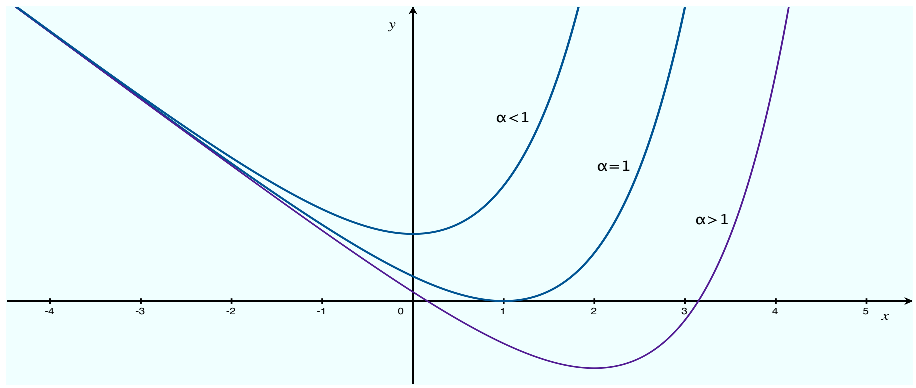
**(3)** La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Posto $f_\alpha(x) = e^{x-\alpha} - x$, studiamo la funzione $f_\alpha(x)$ e determiniamone il numero di zeri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$, inoltre dalla gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = +\infty.$$

La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con

$$f'_\alpha(x) = e^{x-\alpha} - 1$$

Dunque, avremo $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x > \alpha$ e quindi che $f_\alpha(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, \alpha]$, strettamente crescente in $[\alpha, +\infty)$ e che $x = \alpha$ è punto di minimo assoluto per $f_\alpha(x)$ con $f_\alpha(\alpha) = 1 - \alpha$. Osservato che $f_\alpha(\alpha) < 0$ se $\alpha > 1$, $f_\alpha(\alpha) = 0$ se $\alpha = 1$ e $f_\alpha(\alpha) > 0$ se $\alpha < 1$,




dal Teorema di esistenza degli zeri e dalla monotonia della funzione otteniamo che se $\alpha > 1$ la funzione ammette due soli zeri $x_\alpha < \alpha$ e $\bar{x}_\alpha > \alpha$, se $\alpha = 1$ uno ed un solo zero $x_\alpha = \alpha = 1$, mentre non ammette zeri se $\alpha < 1$.
Riguardo al segno degli zeri, osserviamo che se $\alpha = 1$ la funzione ha un solo zero positivo $x_\alpha = 1$, mentre se $\alpha > 1$ i due zeri della funzione sono entrambi positivi. Infatti, $\bar{x}_\alpha > \alpha > 1 > 0$ mentre, essendo $f_\alpha(0) = e^{-\alpha} > 0$ e la funzione decrescente in $(-\infty, 0]$, risulta $f_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \leq 0$ e dunque $x_\alpha > 0$. Si poteva in alternativa osservare che essendo l'esponenziale funzione positiva, le soluzioni dell'equazione $x = e^{x-\alpha}$ risultano necessariamente positive.

In alternativa, poichè si cercano soluzioni positive, l'equazione $e^{x-\alpha} = x$ per $x > 0$ potrà essere riscritta come $x - \alpha = \log x$ e dunque si potevano cercare le soluzioni dell'equazione $g(x) = x - \log x = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(4)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\, dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x}\, dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x}\, dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\right]_0^1 = 2 - \frac{5}{e}$$

**(5)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osservato che la funzione $f_\alpha(x) = \frac{\log^2 x}{(x-1)^\alpha \sin \frac{1}{x}}\, dx$ risulta continua in $(0, +\infty)$, studiamo separatamente la convergenza degli integrali $\int_1^2 f_\alpha(x)\, dx$ e $\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$. Dagli sviluppi notevoli, per $x \to 1$ risulta

$$f_\alpha(x) = \frac{\log^2(1 + x - 1)}{(x-1)^\alpha \sin \frac{1}{x}} \sim \frac{(x-1)^2}{(x-1)^\alpha \sin 1} = \frac{1}{\sin 1 (x-1)^{\alpha-2}}$$

e dal criterio del confronto asintotico, essendo $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p}\, dx$ convergente se e solo se $p < 1$, deduciamo che l'integrale $\int_1^2 f_\alpha(x)\, dx$ converge se e solo se $\alpha < 3$.
Per $x \to +\infty$ risulta invece

$$f_\alpha(x) = \frac{\log^2 x}{(x-1)^\alpha \sin \frac{1}{x}} \sim \frac{\log^2 x}{x^{\alpha-1}}$$

e l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^\beta}\, dx$ converge se e solo se $\beta > 1$[1]. Dal criterio del confronto asintotico deduciamo allora che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > 2$.
Riundendo quanto ottenuto, concludiamo che l'integrale dato converge se e solo se $2 < \alpha < 3$.

[1] Infatti, per $x \to +\infty$, dalla gerarchia degli infiniti risulta

$$\frac{\frac{\log^2 x}{x^\beta}}{\frac{1}{x^p}} = \frac{\log^2 x}{x^{\beta-p}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \beta > p \\ +\infty & \text{se } \beta \le p \end{cases}$$

Dunque, se $\beta > 1$, scegliendo $1 < p < \beta$, dal primo limite e dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\int_2^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^\beta}\, dx$ converge. Se $\beta \le 1$, scegliendo $\beta \le p \le 1$, dal secondo limite e dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\int_2^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^\beta}\, dx$ diverge.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 16 febbraio 2012

**1)** La funzione $f_\alpha(x) = x \sin x - x^\alpha \arctan x$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ minore o uguale a 4 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ maggiore o uguale a 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**2)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \log(\cos x) + x \sin x}{x^2} & \text{per } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**3)*** La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{|x-1|}{x}\right)$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette punti di minimo relativo
$\boxed{\text{b}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile in ogni punto del suo dominio
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**4)** L'integrale $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{\cosh x + 1} dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\log 2 + \frac{1}{3}$
$\boxed{\text{b}}$ $2 \log \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$
$\boxed{\text{c}}$ $2 \log 3 - 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**5)*** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n^\alpha}{(n+1)!}}{\log(1 + \frac{2^n}{n!})}$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

## Soluzione

**(1)**La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo per $x \to 0^+$ risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= x \sin x - x^\alpha \arctan x = x(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x^\alpha (x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)) - x^{\alpha+1} + \frac{x^{3+\alpha}}{3} + o(x^{3+\alpha})) \end{aligned}$$

Quindi se $\alpha > 1$ avremo $f_\alpha(x) = x^2 + o(x^2)$ e dunque $ord(f_\alpha(x)) = 2$, se $\alpha = 1$ allora $f_\alpha(x) = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ da cui $ord(f_\alpha(x)) = 4$ e infine se $\alpha < 1$ risulta $f_\alpha(x) = -x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$ e quindi $ord(f_\alpha(x)) = \alpha + 1 < 2$.

**(2)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sin(\beta x) = 0 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $\sin x = x + o(x)$ e $\log(\cos x) = (\cos x - 1) + o(\cos x - 1) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha \log(\cos x) + x \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1 - \frac{\alpha}{2})x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 2$.
Riguardo alla derivabilità, abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(\beta x)}{x} = \beta$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$.
Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = 2$, essendo per $x \to 0$, $\sin x = x + o(x^2)$ e $\log(\cos x) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o((\cos x - 1)^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$[2]
risulta

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \log(\cos x) + x \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

---

[2] Volendo sviluppare sino all'ordine 4 si ottiene $\log(\cos x) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o((\cos x - 1)^2) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2 + o((-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

**(3)** La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \lim_{x \to 0^\pm} \arctan \frac{1-x}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan \frac{x-1}{x} = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan \frac{1-x}{x} = -\frac{\pi}{4},$$

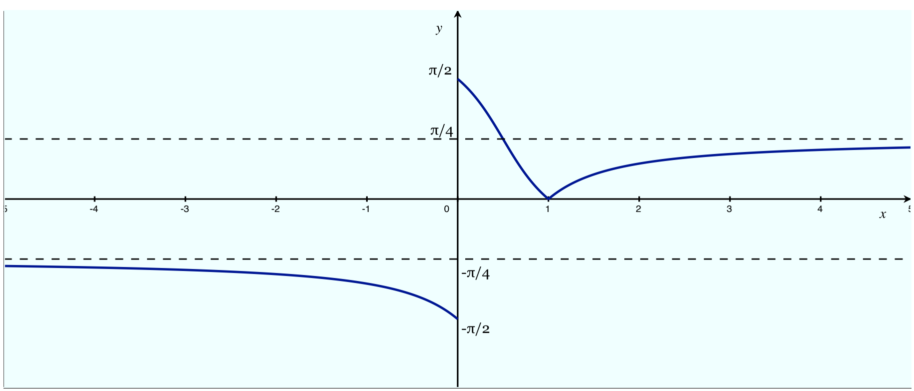
quindi $y = \pm\frac{\pi}{4}$ risultano rispettivamente asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$ e $\boxed{\text{b}}$ risulta falsa.
La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2-2x+1} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{1}{2x^2-2x+1} & \text{se } x < 1,\ x \neq 0 \end{cases}$$

mentre essendo

$$\lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = \pm 1$$

avremo che $x = 1$ risulta punto angoloso per $f(x)$ con $f'_\pm(1) = \pm 1$. Quindi $\boxed{\text{c}}$ è falsa.
Riguardo alla monotonia, osservato che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, avremo che $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty)$ e che $x = 1$ risulta punto di minimo relativo per $f(x)$ con $f(1) = 0$. Dunque anche $\boxed{\text{a}}$ è falsa.




**(4)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = e^x$ (da cui $dt = e^x dx$) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \frac{e^x}{\cosh x + 1} dx &= \int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx = \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2t+2}{t^2+2t+1} dt - \int_1^2 \frac{2}{(t+1)^2} dt = \left[ \log(t^2 + 2t + 1) + \frac{2}{t+1} \right]_1^2 \\ &= 2 \log \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

In alternativa, osservato che $D(\frac{1}{e^x+1}) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, si poteva integrare per parti ottenendo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\cosh x + 1} dx = 2\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2} e^x dx &= -2\frac{e^x}{e^x+1} + 2\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx \\ &= -2\frac{e^x}{e^x+1} + 2\log(1+e^x) + c\end{aligned}$$

e dunque

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{\cosh x + 1} dx = \left[-2\frac{e^x}{e^x+1} + 2\log(1+e^x)\right]_0^{\log 2} = 2\log\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$$

**(5)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, dalla gerachia degli infiniti, essendo $\frac{2^n}{n!} \to 0$ e $\frac{n^\alpha}{(n+1)!} \to 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e usando i limiti notevoli $\log(1+x_n) \sim x_n$ e $\sin x_n \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{\sin \frac{n^\alpha}{(n+1)!}}{\log(1+\frac{2^n}{n!})} \sim \frac{\frac{n^\alpha}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{n^\alpha}{(n+1)2^n} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{2^n}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{2^n}$ per il criterio del rapporto risulta convergente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, in quanto, posto $a_n = \frac{n^{\alpha-1}}{2^n}$, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^{\alpha-1}} = (1+\frac{1}{n})^{\alpha-1}\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dal Criterio del confronto asintotico segue allora che la serie data converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 3 marzo 2012

**1)** La successione $a_n = \dfrac{(n!)^\alpha}{(3n)!}$ per $n \to +\infty$

- $\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha > 0$
- $\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha \leq 3$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**2)** L'ordine di infinitesimo della funzione $f_\alpha(x) = e^{-x^2} - \cos x + \sin x - \log(1+\alpha x)$ per $x \to 0$ è

- $\boxed{\text{a}}$ 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{b}}$ 3 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{c}}$ 2 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**3)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1-x^2)+x\sin x}{x^\alpha} & \text{per } x > 0 \\ \sinh(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

- $\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{b}}$ è derivabile solo per $\alpha = \beta = 0$
- $\boxed{\text{c}}$ è continua per ogni $\alpha > 3$ e $\beta \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**4)** L'equazione $\log|\alpha x - 1| = \alpha x$ con $\alpha > 0$ ammette due soluzioni

- $\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$
- $\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha > 0$
- $\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > 1$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**5)** L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} dx$ vale

- $\boxed{\text{a}}$ $\frac{5}{e}$
- $\boxed{\text{b}}$ $+\infty$
- $\boxed{\text{c}}$ 2
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

## Soluzione

**(1)**La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ risulta

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^\alpha}{(3n+3)!} \frac{((3n)!)^\alpha}{((n!))^\alpha} \\
&= \frac{(n+1)^\alpha}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{n^\alpha}{27n^3} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ \frac{1}{27} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

e dal criterio del rapporto possiamo concludere che $a_n \to 0$ se $\alpha \leq 3$ mentre $a_n \to +\infty$ se $\alpha > 3$.

**(2)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, considerando lo sviluppo di ordine 3 abbiamo

$$
\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= e^{-x^2} - \cos x + \sin x - \log(1 + \alpha x) \\
&= -x^2 + \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{6} - (\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3}) + o(x^3) \\
&= (1-\alpha)x + \frac{\alpha^2 - 1}{2} x^2 - \frac{2\alpha^3 - 1}{6} x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Dunque per $\alpha \neq 1$ si ha $f_\alpha(x) = (1-\alpha)x + o(x)$ e $ord(f_\alpha) = 1$ mentre se $\alpha = 1$ risulta $f_\alpha(x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e dunque $ord(f_\alpha(x) = 3$.

**(3)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti,

$$
\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sinh(\beta x) = 0 = f(0)
$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ e $\log(1 - x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ si ottiene

$$
\log(1 - x^2) + x \sin x = -\frac{2}{3} x^4 + o(x^4)
$$

e dunque

$$
\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 - x^2) + x \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{2}{3} x^4 + o(x^4)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ -\frac{2}{3} & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}
$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha < 4$.

Riguardo alla derivabilità, abbiamo che la funzione risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta \cosh(\beta x)$ e poichè $\lim\limits_{x\to 0^-} \beta \cosh(\beta x) = \beta$, possiamo concludere che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Riguardo alla derivata destra, per $\alpha < 4$, dagli sviluppi sopra risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2) + x\sin x}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^{\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha \leq 3$ con $f'_+(0) = 0$ se $\alpha < 3$ e $f'_+(0) = \frac{1}{6}$ se $\alpha = 3$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha < 3$ e $\beta = 0$ e per $\alpha = 3$ e $\beta = \frac{1}{6}$.

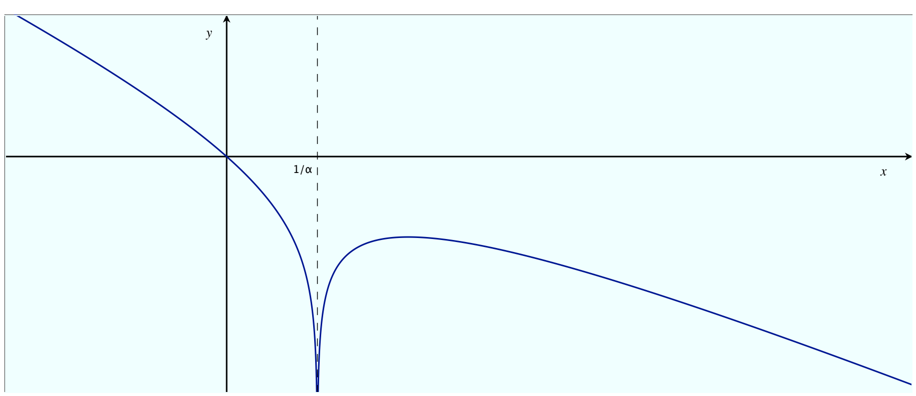
**(4)** La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Posto $f_\alpha(x) = \log|\alpha x - 1| - \alpha x$, determiniamone gli zeri al variare di $\alpha > 0$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\alpha}\}$ con $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\alpha}^\pm} f_\alpha(x) = -\infty$ mentre dalla gerarchia degli infiniti, essendo $\alpha > 0$ risulta

$$\lim_{x\to +\infty} f_\alpha(x) = \mp\infty,$$

La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\alpha}\}$ con

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha x - 1} - \alpha = \frac{\alpha(2 - \alpha x)}{\alpha x - 1}$$

Essendo $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x \in (\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha})$, avremo che $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, \frac{1}{\alpha}) \cup (\frac{2}{\alpha}, +\infty)$, strettamente crescente in $(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha})$ e che $x_\alpha = \frac{2}{\alpha}$ risulta punto di massimo relativo per $f_\alpha(x)$ con $f_\alpha(\frac{2}{\alpha}) = -2 < 0$ per ogni $\alpha > 0$.




Ne segue che per ogni $\alpha > 0$ risulta $f_\alpha(x) \leq -2 < 0$ per ogni $x > \frac{1}{\alpha}$ e dunque che la funzione non ammette zeri in $(\frac{1}{\alpha}, +\infty)$, mentre essendo $\sup_{(-\infty,\frac{1}{\alpha})} f_\alpha(x) = +\infty$,

$\inf_{(-\infty,\frac{1}{\alpha})} f_\alpha(x) = -\infty$ e $f_\alpha(x)$ strettamente decrescente in $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$, dal Teorema dei valori intermedi la funzione ammette un unico zero ($x = 0$) in $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$.

**(5)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = -\frac{1}{x}$ (da cui $dx = \frac{1}{t^2}dt$) ed integrando per parti otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t dt \\
&= t^2 e^t - 2te^t + 2 \int e^t dt = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + c \\
&= e^t (t^2 - 2t + 2) + c = e^{-\frac{1}{x}} (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2) + c
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} dx &= \lim_{a \to 0^+} \left[ e^{-\frac{1}{x}} (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2) \right]_a^1 \\
&= \frac{5}{e} - \lim_{a \to 0^+} e^{-\frac{1}{a}} (\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 2) = \frac{5}{e}
\end{aligned}
$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 31 marzo 2012

**1)** La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^\alpha}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha < 3$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha \geq 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**2)** L'ordine di infinitesimo della funzione $f_\alpha(x) = \sin x \sinh x + \log(1 + \alpha x^2)$ per $x \to 0$ è

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**3)*** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x}}{x^\alpha} & \text{per } x > 0 \\ \beta \cosh x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è derivabile solo per $\alpha < 1$ e $\beta = 0$
$\boxed{\text{c}}$ è continua per ogni $\alpha \leq 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**4)** La funzione $f(x) = (x - \dfrac{1}{4})e^{\frac{1}{x}}$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti obliqui
$\boxed{\text{b}}$ è monotona nel suo dominio
$\boxed{\text{c}}$ è convessa in $(0, +\infty)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**5)*** L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log(x-1)}{x^2}dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $+\infty$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{2}\log 2$
$\boxed{\text{c}}$ $\log 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

## Soluzione

**(1)**La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, posto $a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^\alpha}$ per $n \to +\infty$ risulta

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1)+1)!}{((n+1)!)^\alpha} \frac{(n!)^\alpha}{((2n+1)!)^\alpha} = \frac{(2n+3)!}{(n+1)^\alpha (n!)^\alpha} \frac{(n!)^\alpha}{((2n+1)!)^\alpha} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{4n^2}{n^\alpha} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 4 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}\end{aligned}$$

e dal criterio del rapporto possiamo concludere che la serie converge se $\alpha > 2$ mentre diverge se $\alpha \leq 2$.

**(2)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, considerando lo sviluppo di ordine 4 abbiamo

$$\begin{aligned}f_\alpha(x) &= \sin x \sinh x + \log(1+\alpha x^2) \\ &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)) + \alpha x^2 - \frac{\alpha^2}{2} x^4 + o(x^4) \\ &= (1+\alpha)x^2 - \frac{\alpha^2}{2} x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Dunque per $\alpha \neq -1$ si ha $f_\alpha(x) = (1+\alpha)x^2 + o(x^2)$ e $ord(f_\alpha) = 2$ mentre se $\alpha = -1$ risulta $f_\alpha(x) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$ e dunque $ord(f_\alpha(x) = 4$.

**(3)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \beta \cosh x = \beta = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ e $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$ si ottiene

$$e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x} = \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

e dunque

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x}}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{12} + o(x^2)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ per $\alpha < 2$ e $\beta = 0$ e per $\alpha = 2$ e $\beta = \frac{1}{12}$.

Riguardo alla derivabilità, abbiamo che la funzione risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta \sinh x$ e poichè $\lim_{x \to 0^-} \beta \sinh x = 0$, possiamo concludere che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Riguardo alla derivata destra, consideriamo innanzitutto il caso in cui $\alpha < 2$ e $\beta = 0$, dagli sviluppi sopra risulta

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x}}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{12} + o(x^2)}{x^{\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha \leq 1$ con $f'_+(0) = 0$ se $\alpha < 1$ e $f'_+(0) = \frac{1}{12}$ se $\alpha = 1$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha < 1$ e $\beta = 0$.
Se $\alpha = 2$ e $\beta = \frac{1}{12}$, ricordando che per $x \to 0$ risulta $e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$ e $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{6!} + o(x^3)$, abbiamo

$$e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x} = \frac{x^2}{12} - \frac{29}{720}x^3 + o(x^3)$$

e dunque che $f(x)$ ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - \cos\sqrt{x} - \frac{1}{12}x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{29}{720}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{29}{720}$$

ma essendo $f'_-(0) = 0$, ne segue che per $\alpha = 2$ e $\beta = \frac{1}{12}$ la funzione non risulta derivabile in $x_0 = 0$.

**(4)** La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ mentre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x - \frac{1}{4})e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$$

La funzione ammette asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, infatti

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} (x - \frac{1}{4})e^{\frac{1}{x}} - x = \frac{3}{4}.$$ [3]

[3] infatti, ponendo $y = \frac{1}{x}$ e usando il limite notevole $e^y - 1 \sim y$ per $y \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x - \frac{1}{4})e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} - \frac{e^y}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

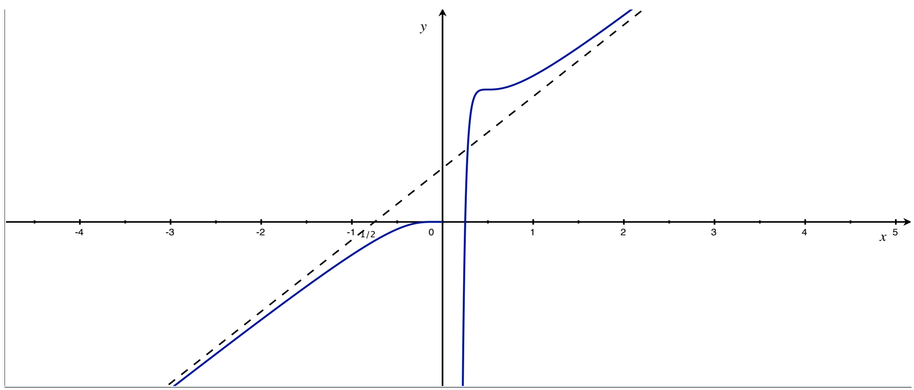
Dunque $y = x + \frac{3}{4}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.
La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$f'(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Poichè $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f'(x) = 0$ solo per $x = \frac{1}{2}$, avremo che $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$ ma non risulta strettamente crescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Infine, la funzione risulta derivabile due volte in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{4x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

e dunque risulta convessa in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, concava in $(-\infty, 0)$ e in $(0, \frac{1}{2})$ e $x = \frac{1}{2}$ risulta punto di flesso a tangente orizzontale.




**(5)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x-1)}{x^2} dx &= -\frac{\log(x-1)}{x} + \int \frac{1}{x(x-1)} dx \\ &= -\frac{\log(x-1)}{x} + \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\log(x-1)}{x} + \log(x-1) - \log x + c\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{\log(x-1)}{x^2} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{\log(x-1)}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[ -\frac{\log(x-1)}{x} + \log(x-1) - \log x \right]_2^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} -\frac{\log(b-1)}{b} + \log \frac{b-1}{b} + \log 2 = \log 2\end{aligned}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 giugno 2012

**1)*** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+\alpha^2}\right)^{n^2}$ per $n \to +\infty$

- [a] diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- [b] converge solo per $\alpha > 0$
- [c] converge per ogni $\alpha \neq 0$
- [d] nessuna delle precedenti

**2)** L'ordine di infinitesimo della funzione $f_\alpha(x) = \sin(\sinh x) + \log(1 + \alpha x)$ per $x \to 0$ è

- [a] 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- [b] 2 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
- [c] maggiore di 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
- [d] nessuna delle precedenti

**3)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \sinh(x^\alpha) & \text{per } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

- [a] non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- [b] è continua per ogni $\alpha \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$
- [c] è derivabile solo per $\alpha > 1$ e $\beta = 0$
- [d] nessuna delle precedenti

**4)*** La funzione $f(x) = \dfrac{|x| - e^x}{|x| + e^x}$

- [a] non ammette asintoti
- [b] è derivabile in tutto il suo dominio
- [c] ammette due zeri
- [d] nessuna delle precedenti

**5)** L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\log(1+x)}{x^2}dx$ vale

- [a] $+\infty$
- [b] $\log \frac{1}{2}$
- [c] $2\log 2$
- [d] nessuna delle precedenti

Soluzione

**(1)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, posto $a_n = \left(\frac{n}{n+\alpha^2}\right)^{n^2}$ per $n \to +\infty$, dai limiti notevoli sul numero di Nepero, risulta

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+\alpha^2}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+\alpha^2}\right)^{n} = \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha^2}{n}\right)^n} \to e^{-\alpha^2}$$

e dal criterio della radice possiamo concludere che la serie converge se $e^{-\alpha^2} < 1$ ovvero se $\alpha \neq 0$. Per $\alpha = 0$ risulta invece $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque la corrispondente serie diverge.

**(2)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, considerando lo sviluppo di ordine 2 delle funzioni coinvolte risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \sin(\sinh x) + \log(1+\alpha x) \\ &= \sinh x + o(\sinh^2 x) + \alpha x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= (1+\alpha)x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Dunque per $\alpha \neq -1$ si ha $f_\alpha(x) = (1+\alpha)x + o(x)$ e $ord(f_\alpha) = 1$ mentre se $\alpha = -1$ risulta $f_\alpha(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e dunque $ord(f_\alpha(x) = 2$.

**(3)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin(\beta x) = 0 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, dai limiti notevoli della funzione $\sinh x$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sinh(x^\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \sinh 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > 0$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$.
Riguardo alla derivabilità, abbiamo che la funzione risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta \sinh x$ e poichè $\lim_{x\to 0^-} \beta\cos(\beta x) = \beta$, possiamo concludere che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Riguardo alla derivata destra, essendo per $x \to 0$, $\sinh(x^\alpha) \sim x^\alpha$ per ogni $\alpha > 0$ risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x^\alpha)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha \geq 1$ con $f'_+(0) = 0$ se $\alpha > 1$ e $f'_+(0) = 1$ se $\alpha = 1$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha > 1$ e $\beta = 0$ con $f'(0) = 0$ ma anche per $\alpha = \beta = 1$ con $f'(0) = 1$.

**(4)** La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$. Dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - e^x}{x + e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{e^x} - 1}{\frac{x}{e^x} + 1} = -1$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x - e^x}{-x + e^x} = 1$$

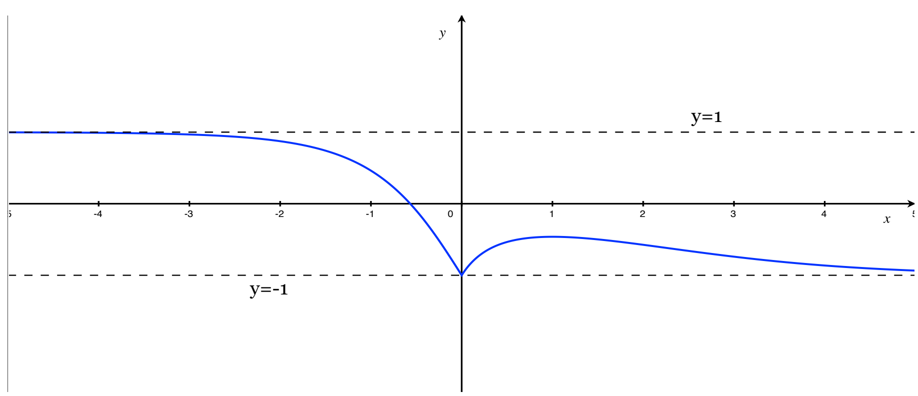
Risulta allora che la funzione ammette come asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$ rispettivamente le rette $y = \mp 1$. La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{2e^x(1-x)}{(-x+e^x)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

mentre non risulta derivabile in $x = 0$ essendo

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2} = 2 \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{-2e^x(1-x)}{(-x+e^x)^2} = -2.$$

Dunque $x = 0$ risulta punto angoloso con $f'_\pm(0) = \pm 2$.
Poichè $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$ e $x > 1$ mentre $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, avremo che $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e in $[1, +\infty)$, strettamente crescente in $[0, 1]$ e dunque $x = 0$ risulta punto di minimo (assoluto) con $f(0) = -1$ mentre $x = 1$ risulta punto di massimo relativo con $f(1) = \frac{1-e}{1+e} < 0$.




Ne segue allora che $f(x) < 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ mentre, dal Teorema di esistenza degli zeri e dalla monotonia stretta della funzione, la funzione ammette un unico zero nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

**(5)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(1+x)}{x^2}dx &= -\frac{\log(1+x)}{x} + \int \frac{1}{x(1+x)}dx \\ &= -\frac{\log(1+x)}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}dx \\ &= -\frac{\log(1+x)}{x} + \log x - \log(1+x) + c\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\log(1+x)}{x^2}dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{\log(1+x)}{x} + \log x - \log(1+x)\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} -\frac{\log(1+b)}{b} + \log\frac{b}{1+b} + 2\log 2 = 2\log 2\end{aligned}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12 luglio 2012

**1)** L'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \log(1+x) - \log(1+\sin x)$ per $x \to 0$ è

a 1
b 3
c 2
d nessuna delle precedenti

**2)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\cosh(x^\alpha)-1}{x} & \text{per } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

a non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
b è continua per ogni $\alpha \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$
c è derivabile solo per $\alpha > 1$ e $\beta = 0$
d nessuna delle precedenti

**3)** La funzione $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} - e^x$ per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$,

a è monotona in $[0, +\infty)$
b non ammette asintoti
c ammette un punto di massimo
d nessuna delle precedenti

**4)** L'integrale $\displaystyle\int_0^\pi x^2 |\cos x|\, dx$ vale

a $2\pi$
b $\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$
c 0
d nessuna delle precedenti

**5)** La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ha insieme di convergenza

a $\mathbb{R}$
b $(-1, 1)$
c $[-1, 1)$
d nessuna delle precedenti

## Soluzione

**(1)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, considerando lo sviluppo di ordine 3 di $\log(1+y)$ con $y = \sin x$ e di $\sin x$, dalle proprietà di "$o$" piccolo otteniamo

$$
\begin{aligned}
\log(1+\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(\sin^3 x)) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^3 + o((x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^3 \\
&= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
f(x) = \log(1+x) - \log(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)
$$

da cui $ord(f(x)) = 3$.

**(3)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti,

$$
\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin(\beta x) = 0 = f(0)
$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, per $\alpha < 0$ poichè $x^\alpha \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e $x^\alpha = 1$ per $\alpha = 0$ abbiamo che

$$
\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty
$$

per ogni $\alpha \leq 0$, mentre essendo $x^\alpha \to 0$ per $\alpha > 0$ e $x \to 0^+$, ricordando che $\cosh y - 1 \sim \frac{y^2}{2}$ per $y \to 0$, per $\alpha > 0$ otteniamo che

$$
\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(x^\alpha) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2\alpha-1}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}
$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > \frac{1}{2}$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$.
Riguardo alla derivabilità, abbiamo che la funzione risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta\cos(\beta x)$ e poichè $\lim\limits_{x\to 0^-} \beta\cos(\beta x) = \beta$, possiamo concludere che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Riguardo alla derivata destra, per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$ risulta

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(x^\alpha) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2\alpha-2}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}
$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha \geq 1$ con $f'_+(0) = 0$ se $\alpha > 1$ e $f'_+(0) = \frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha > 1$ e $\beta = 0$ con $f'(0) = 0$ ma anche per $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$ con $f'(0) = \frac{1}{2}$.

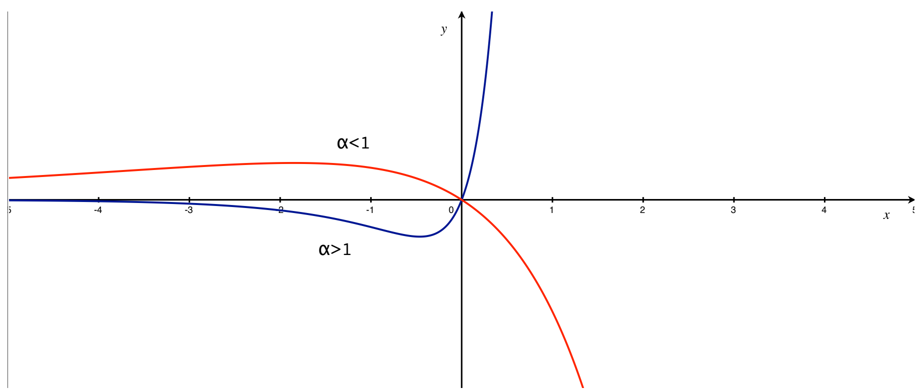
**(3)** La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^{(\alpha-1)x} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$ [4]

mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e $\boxed{\text{b}}$ è falsa. La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con

$$f'(x) = \alpha e^{\alpha x} - e^x = e^x(\alpha e^{(\alpha-1)x} - 1)$$

Osserviamo che posto $x_\alpha = \frac{\log\alpha}{1-\alpha}$, risulta che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > x_\alpha$ per $\alpha > 1$ mentre $f'(x) > 0$ se e solo se $x < x_\alpha$ per $\alpha < 1$. Avremo allora che per $\alpha > 1$ $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, x_\alpha]$, strettamente crescente in $[x_\alpha, +\infty)$ con $x_\alpha$ punto di minimo mentre per $\alpha < 1$ $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, x_\alpha]$, strettamente decrescente in $[x_\alpha, +\infty)$ con $x_\alpha$ punto di massimo. Dunque $\boxed{\text{c}}$ è falsa. Poichè $x_\alpha = \frac{\log\alpha}{1-\alpha} < 0$ per ogni $\alpha \neq 1$ possiamo concludere che $f(x)$ risulta monotona in $[0, +\infty)$ e dunque che $\boxed{\text{a}}$ è vera.




**(4)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, usando l'additività dell'integrale abbiamo

$$\int_0^\pi x^2|\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x^2\cos x\,dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= x^2\sin x - \int 2x\sin x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int\cos x \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c\end{aligned}$$

[4]un terribile frequente errore: per le proprietà delle potenze $e^{\alpha x} = e^x e^{(\alpha-1)x}$ e NON $e^{\alpha x} = e^x e^\alpha$!

e dunque

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x^2 |\cos x|\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x\, dx.\\
&= \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4
\end{aligned}
$$

**(5)** La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, posto $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \to +\infty$ risulta

$$
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 1.
$$

Dal metodo del rapporto possiamo concludere che la serie ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e dunque che la serie converge per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Osservato inoltre che per $x = 1$ abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ che risulta divergente mentre per $x = -1$ abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ che risulta convergente per il criterio di Leibniz, possiamo concludere che l'insieme di convergenza della serie data è l'intervallo $[-1, 1)$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 6 settembre 2012

**1)** L'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+\sin^2 x}$ per $x \to 0$ è

$\boxed{\text{a}}$ 2 $\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4
$\boxed{\text{c}}$ 4 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**2)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(2x)-\sinh(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0 \\ \cos(\beta x) & \text{per } x \le 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**3)** La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt{\alpha x^2} - \sqrt{x}$ per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$,

$\boxed{\text{a}}$ ammette asintoti $\boxed{\text{b}}$ è monotona nel suo dominio
$\boxed{\text{c}}$ è non negativa nel suo dominio $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**4)** L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 x|\log x|\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $2\log 2 - \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{b}}$ $\log 2$
$\boxed{\text{c}}$ $1 - 2\log 2$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**5)** La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \tan\frac{1}{n^2}$ ha insieme di convergenza

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{b}}$ $[-1, 1]$
$\boxed{\text{c}}$ $[-1, 1)$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

## Risposte*

1. $\boxed{\text{c}}$ $(f(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4))$
2. $\boxed{\text{d}}$ (derivabile solo per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$)
3. $\boxed{\text{d}}$
4. $\boxed{\text{a}}$
5. $\boxed{\text{b}}$

* Solo le risposte di cui e' presente lo svolgimento sono ritenute valide per la valutazione del compito.

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 ottobre 2012

**1)*** L'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} - \sqrt{1-x^2}$ per $x \to 0$ è

$\boxed{\text{a}}$ 2 $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4
$\boxed{\text{c}}$ 4 $\qquad$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**2)** La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\cosh(2x)-\cosh(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0 \\ \cos(\beta x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ $\qquad$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**3)*** L'equazione $2x^2 + \alpha = \sqrt{x}$ ammette almeno una soluzione

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \leq \frac{3}{8}$ $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**4)** L'integrale $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\pi^2 - 4$ $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ $2\pi$
$\boxed{\text{c}}$ 0 $\qquad$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

**5)** La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \log(1 - \tfrac{1}{n})$ ha insieme di convergenza

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ $(-1, 1]$
$\boxed{\text{c}}$ $[-1, 1)$ $\qquad$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

## Risposte*

1. $\boxed{\text{c}}$
2. $\boxed{\text{a}}$
3. $\boxed{\text{a}}$
4. $\boxed{\text{a}}$
5. $\boxed{\text{c}}$

* Solo le risposte di cui e' presente lo svolgimento sono ritenute valide per la valutazione del compito.