Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 14/01/2011

1) La funzione $f(x) = \sinh x \cos x - \sqrt{1+\alpha x} + 1$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

a) 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b) 2 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
c) 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
d) nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x - 2\log(1+\alpha x^2)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \tan(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

a) è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
b) è derivabile solo per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 2$
c) è derivabile per ogni $\alpha = 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$
d) nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^{2x} = \alpha x$ con $\alpha > 0$, ammette due soluzioni

a) per nessun $\alpha > 0$
b) per ogni $\alpha < 4$
c) solo per $\alpha > 2e$
d) nessuna delle precedenti

4) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x \arctan(x^2)\, dx$ vale

a) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2$
b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$
c) $\frac{1}{12} - \frac{\pi}{2}$
d) nessuna delle precedenti

5) L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n^2 \log n}$ è

a) $[-3, 3]$
b) $[-3, 3)$
c) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
d) nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x \cos x - \sqrt{1+\alpha x} + 1 \\ &= (x + o(x^2))(1 + o(x)) - (1 + \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{8}x^2 + o(x^2)) + 1 \\ &= (x + o(x^2)) - (\frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{8}x^2 + o(x^2)) \\ &= (1 - \frac{\alpha}{2})x + \frac{\alpha^2}{8}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ avrà ordine di infinitesimo pari a 1 per ogni $\alpha \neq 2$ e pari a 2 per $\alpha = 2$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \tan(\beta x) = 0 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $\sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$ e $\log(1 + \alpha x^2) = \alpha x^2 + o(x^2)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x - 2\log(1+\alpha x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-2\alpha)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 - 2\alpha$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ con $f'(x) = \frac{\beta}{\cos^2(\beta x)}$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$.
Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = \frac{1}{2}$, osservato che per $x \to 0$ risulta $\sin^2 x = (x + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3)$ mentre $\log(1 + \frac{x^2}{2}) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x - 2\log(1+\frac{x^2}{2})}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 0$.

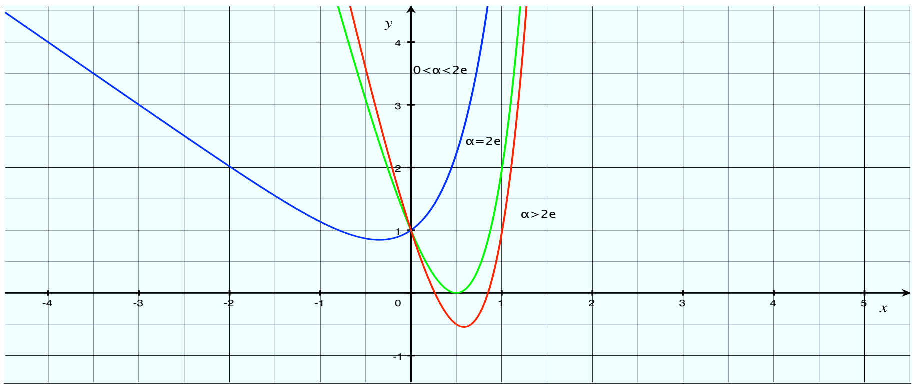
(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Posto $f_\alpha(x) = e^{2x} - \alpha x$, studiamo la funzione $f_\alpha(x)$ e determiniamone il numero di zeri al variare di $\alpha > 0$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$, inoltre dalla gerarchia degli infiniti, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = +\infty.$$

La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con

$$f'_\alpha(x) = 2e^{2x} - \alpha$$

Dunque, avremo $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}\log(\frac{\alpha}{2}) = x_\alpha$ e quindi che $f_\alpha(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, x_\alpha]$, strettamente crescente in $[x_\alpha, +\infty)$ e che x_α è punto di minimo assoluto per $f_\alpha(x)$ con $f_\alpha(x_\alpha) = \frac{\alpha}{2}(1 - \log\frac{\alpha}{2})$. Osservato che $f_\alpha(x_\alpha) < 0$ se $\alpha > 2e$, $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ se $\alpha = 2e$ e $f_\alpha(x_\alpha) > 0$ se $0 < \alpha < 2e$,



dal Teorema di esistenza degli zeri e dalla monotonia della funzione otteniamo che la funzione $f_\alpha(x)$ ammette due zeri se $\alpha > 2e$, uno zero se $\alpha = 2e$ mentre non ammette zeri se $0 < \alpha < 2e$.

In alternativa, osservato che ogni eventuale soluzione dell'equazione $e^{2x} = \alpha x$ risulta non nulla, si poteva studiare l'equazione $\frac{e^{2x}}{x} = \alpha$ determinando l'immagine della funzione $g(x) = \frac{e^{2x}}{x}$

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\int x \arctan(x^2)\, dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\log(1+x^4) + c$$

da cui

$$\int_0^1 x \arctan(x^2)\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2.$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Dal Metodo del rapporto di D'Alembert abbiamo che il raggio di convergenza della serie è $\rho = 3$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n n^2 \log n}{3^{n+1}(n+1)^2 \log(n+1)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{3}.$$

Ne segue allora che la serie converge per $|x| < 3$ e non converge per $|x| > 3$. Per $|x| = 3$ abbiamo che la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) essendo la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} |\frac{x^n}{3^n n^2 \log n}| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ convergente. Infatti risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

ed essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente, dal criterio del confronto asintotico si ha che anche la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ converge.
Ne concludiamo allora che l'insieme di convergenza della serie data è l'intervallo $[-3, 3]$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 05/02/2011

1) La successione $a_n = n^2 \log(\cos \frac{1}{n^\alpha})$ per $n \to +\infty$ converge

[a] per ogni $\alpha > 0$
[b] per nessun $\alpha > 0$
[c] solo per $\alpha > 1$
[d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\alpha x) - \sin x \cosh x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \cos(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

[a] è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
[b] non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
[c] è derivabile per $\alpha = 2$ e $\beta = 0$
[d] nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1}$ ha per immagine

[a] $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
[b] $(-\infty, -3) \cup [6, +\infty)$
[c] $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$
[d] nessuna delle precedenti

4)* L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ vale

[a] $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$
[b] $3\sqrt{2}$
[c] 0
[d] nessuna delle precedenti

5)* La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{\alpha n}}{n^2 \log n}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

[a] per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
[b] per ogni $\alpha \leq 0$
[c] solo per $\alpha < 0$
[d] nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, dai limiti notevoli $\log(1+y) \sim y$ e $1-\cos y \sim \frac{y^2}{2}$ per $y \to 0$, per ogni $\alpha > 0$, essendo $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $n \to +\infty$, risulta

$$a_n = n^2 \log(\cos \frac{1}{n^\alpha}) \sim n^2(\cos \frac{1}{n^\alpha} - 1) \sim -\frac{n^2}{2n^{2\alpha}} = -\frac{1}{2n^{2\alpha-2}}.$$

Ne segue allora che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

e dunque che la successione converge se e solo se $\alpha \geq 1$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(\beta x) = 1 = f(0)$$

per ogni $\beta \in I\!R$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $\log(1+\alpha x) = \alpha x + o(x)$ e $\sin x \cosh x = (x+o(x))(1+o(x)) = x + o(x)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x) - \sin x \cosh x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha-1)x + o(x)}{x} = \alpha - 1$$

per ogni $\alpha \in I\!R$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 2$.
Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = -\beta \sin(\beta x)$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ per ogni $\beta \in I\!R$. Quindi, per ogni $\beta \in I\!R$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$.
Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = 2$, osservato che per $x \to 0$ risulta $\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$ e $\sin x \cosh x = (x + o(x^2))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = x + o(x^2)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+2x) - \sin x \cosh x}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x - 2x^2 - x + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{x^2} = -2 \end{aligned}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = -2$. Ne segue che la funzione non risulta derivabile in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$.

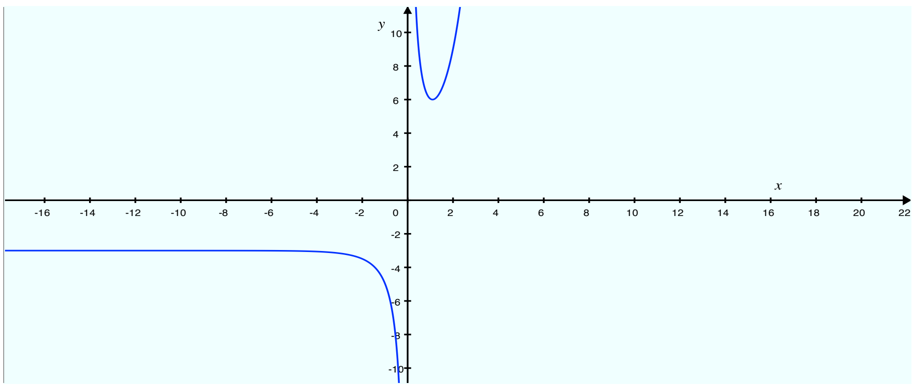
(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. La funzione risulta definita e continua in $I\!R \setminus \{0\}$ con

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

La funzione risulta derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2}$$

Poichè $e^{2x} - 2e^x - 3 > 0$ se e solo se $e^x > 3$, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x > \log 3$ e quindi che $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, \log 3]$, strettamente crescente in $[\log 3, +\infty)$ e che $x_0 = \log 3$ è punto di minimo relativo per $f(x)$ con $f(\log 3) = 6$.



Dal Teorema dei valori intermedi otteniamo che l'immagine della funzione risulta allora essere l'insieme

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -3) \cup [6, +\infty).$$

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, si ha

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x\, dx$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + c$$

da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \left[\frac{1}{\cos x} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2.$$

In alternativa, si poteva procedere integrando per parti nei seguenti modi

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \sin x \tan^2 x\, dx = -\cos x \tan^2 x + 2\int \cos x \tan x \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$
$$= -\cos x \tan^2 x + 2\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$
$$= -\cos x \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} + c = \frac{1}{\cos x} + \cos x + c$$

oppure

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx &= \sin^3 x \tan x - 3\int \sin^2 x \cos x \tan x\,dx \\ &= \sin^3 x \tan x - 3\int \sin^3 x\,dx = \sin^3 x \tan x - 3\int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx \\ &= \sin^3 x \tan x + 3\cos x - \cos^3 x + c = \frac{1}{\cos x} + \cos x + c\end{aligned}$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\alpha(n+1)}}{(n+1)^2\log(n+1)}\frac{n^2\log n}{2^{\alpha n}} = 2^\alpha \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\log(n+1)}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 2^\alpha$$

e dunque, dal criterio del rapporto per serie a termini positivi, otteniamo che la serie converge se $2^\alpha < 1$, ovvero se $\alpha < 0$ e diverge se $2^\alpha > 1$, ovvero se $\alpha > 0$. Se $\alpha = 0$ abbiamo la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ che converge. Infatti risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2\log n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

ed essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente, dal criterio del confronto asintotico si ha che anche la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\log n}$ converge.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 02/03/2011

1) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin^2 x} - \sqrt[3]{1+\alpha x^2}}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \tan(\beta x) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

[a] è continua per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
[b] è derivabile solo per $\alpha = 3$ e $\beta = 0$
[c] è derivabile per $\alpha = 2$ e ogni $\beta \in I\!R$
[d] nessuna delle precedenti

2)* La funzione $f(x) = x^2 - x \log x$

[a] ha immagine $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$
[b] è convessa nel suo dominio
[c] ammette un punto di minimo relativo
[d] nessuna delle precedenti

3) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^3 \arctan x \, dx$ vale

[a] $\log 2 - \frac{1}{2}$
[b] $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
[c] $\frac{1}{6}$
[d] nessuna delle precedenti

4)* L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)\cosh\sqrt{x} - \log(1+x)}{x^{5/2}} \, dx$ converge

[a] per ogni $\alpha \in I\!R$
[b] per qualche $\alpha \in I\!R$
[c] per nessun $\alpha \in I\!R$
[d] nessuna delle precedenti

5) L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{e^n}}{n^3} x^n$ è

[a] $[-e, e]$
[b] $[-e, e)$
[c] $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$
[d] nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \tan(\beta x) = 0 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$,

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + o(\sin^2 x) = 1 + (x + o(x))^2 + o((x + o(x))^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

e $\sqrt[3]{1+\alpha x^2} = 1 + \frac{\alpha x^2}{3} + o(x^2)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin^2 x} - \sqrt[3]{1+\alpha x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\frac{\alpha}{3})x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 - \frac{\alpha}{3}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 3$.
Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \frac{\beta}{\cos^2(\beta x)}$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$.
Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = 3$, osservato che per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
e^{\sin^2 x} &= 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + o(\sin^4 x)\\
&= 1 + (x + o(x^2))^2 + \frac{(x+o(x^2))^4}{2} + o((x+o(x^2))^4) = 1 + x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Mentre $\sqrt[3]{1+3x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$. Otteniamo allora che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin^2 x} - \sqrt[3]{1+\alpha x^2}}{x^3} \quad = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

e quindi che la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 3$ e $\beta = 0$.
NOTA: Si osservi che lo sviluppo di ordine 4 della funzione $e^{\sin^2 x}$ risulta essere

$$\begin{aligned}
e^{\sin^2 x} &= 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + o(\sin^4 x)\\
&= 1 + (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^4 + o((x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^4)\\
&= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione è definita e continua in $(0,+\infty)$ e, dalla gerarchia degli infiniti, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 - \frac{\log x}{x}) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - x\log x = 0$$

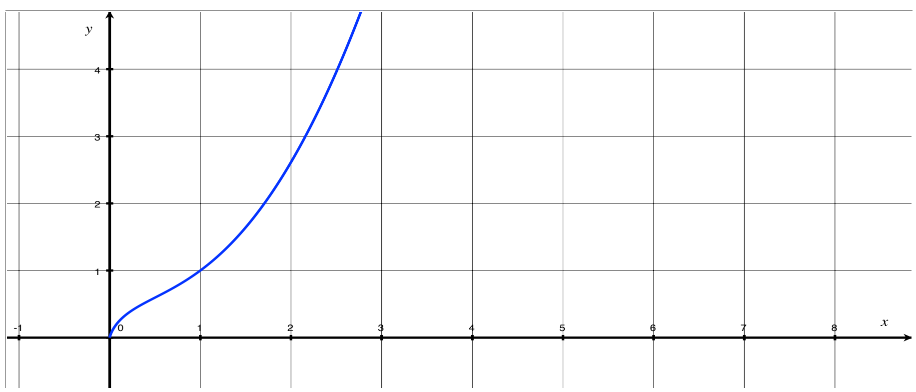
La funzione risulta derivabile in ogni $x > 0$ con $f'(x) = 2x - \log x - 1$. Osservato che, essendo $\log x$ funzione concava in $(0, +\infty)$, risulta $\log x \leq x - 1$ per ogni $x > 0$, otteniamo

$$f'(x) = 2x - \log x - 1 \geq x > 0, \quad \forall x > 0.$$[1]

In particolare, dal Teorema di Fermat, possiamo concludere che la funzione non ammette ne' punti di massimo ne' punti di minimo relativo e dunque che la risposta $\boxed{\text{c}}$ è falsa. Abbiamo inoltre che la funzione risulta strettamente crescente nel suo domino e quindi

$$\sup_{x \in (0,+\infty)} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \inf_{x \in (0,+\infty)} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Dal Teorema dei valori intermedi otteniamo allora che $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$ e quindi che la risposta $\boxed{\text{a}}$ è falsa.
Infine, riguardo alla convessità, osserviamo che la funzione risulta derivabile due volte nel suo dominio con $f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$ ed essendo $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$, ne deduciamo che la funzione risulta concava nell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ e convessa nell'intervallo $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Dunque anche la risposta $\boxed{\text{b}}$ è falsa.



(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int x^3 \arctan x \, dx &= \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1 + x^2} \, dx \\
&= \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{1}{4} \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \, dx \\
&= \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{1}{4} (\frac{x^3}{3} - x + \arctan x) + c
\end{aligned}$$

[1] In alternativa, posto $g(x) = f'(x) = 2x - \log x - 1$, osserviamo che $g(x)$ risulta derivabile in ogni $x > 0$ con $g'(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Essendo $g'(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$, ne deduciamo che la funzione risulta decrescente in $(0, \frac{1}{2}]$, crescente in $[\frac{1}{2}, +\infty)$ e dunque che $x = \frac{1}{2}$ risulta punto di minimo assoluto per $g(x)$ con $g(\frac{1}{2}) = \log 2$. Essendo $\min_{x \in (0,+\infty)} g(x) = \log 2 > 0$, ne deduciamo che $g(x) = f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

da cui
$$\int_0^1 x^3 \arctan x \; dx = \left[\frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli per $x \to 0$ risulta
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\alpha x) \cosh \sqrt{x} - \log(1+x) \\ &= (\alpha x + o(x^2))(1 + \frac{x}{2} + o(x)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= \alpha x + \frac{\alpha}{2} x^2 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - \\ &= (\alpha - 1)x + \frac{\alpha+1}{2} x^2 + o(x^2) \sim \begin{cases} (\alpha - 1)x & \text{se } \alpha \neq 1 \\ x^2 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue allora che
$$\frac{\sin(\alpha x) \cosh \sqrt{x} - \log(1+x)}{x^{5/2}} \sim \begin{cases} \frac{\alpha - 1}{x^{3/2}} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{x^{1/2}} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e dal criterio del confronto asintotico, essendo $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx$ convergente se e solo se $p < 1$, deduciamo che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha = 1$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Utilizzando il Metodo del rapporto di D'Alembert abbiamo che il raggio di convergenza della serie è $\rho = e$ in quanto, essendo $\sin x_n \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, risulta
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{e^{n+1}}}{(n+1)^3} \frac{n^3}{\sin \frac{1}{e^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{1}{e^n}} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{1}{e} \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{1}{e}.$$

Ne segue allora che la serie converge per $|x| < e$ e non converge per $|x| > e$.
Per $x = \pm e$ abbiamo che la serie converge assolutamente (e dunque semplicemente) essendo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |\frac{\sin \frac{1}{e^n}}{n^3} x^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n \sin \frac{1}{e^n}}{n^3}$ convergente. Infatti, dal precedente limite notevole risulta
$$\frac{e^n \sin \frac{1}{e^n}}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$$
ed essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ convergente, dal criterio del confronto asintotico si ha che anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n \sin \frac{1}{e^n}}{n^3}$ converge. Ne concludiamo allora che l'insieme di convergenza della serie data è l'intervallo $[-e, e]$.
NOTA: Si osservi che il criterio del confronto asintotico non vale per serie a termini di segno alterno e dunque **non è corretto** concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n \sin \frac{1}{e^n}}{n^3}$ converge essendo $(-1)^n \frac{e^n \sin \frac{1}{e^n}}{n^3} \sim \frac{(-1)^n}{n^3}$ per $n \to +\infty$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ convergente per il criterio di Leibniz.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 25/06/2011

1) La funzione $f(x) = (1+x)\log(1-x) + x\sqrt{1+\alpha x}$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 2 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 1 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2)* La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \alpha x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è derivabile solo per $\alpha = 0$
$\boxed{\text{c}}$ non è derivabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \sqrt{x|x-\alpha|}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{b}}$ ammette due zeri
$\boxed{\text{c}}$ ammette un punto di massimo relativo
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4)* L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $+\infty$
$\boxed{\text{b}}$ $1 + \log 2$
$\boxed{\text{c}}$ $\log 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n!}} - 1)x^n$ è

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ $[-1, 1]$
$\boxed{\text{c}}$ $(-2, 2)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)\log(1-x) + x\sqrt{1+\alpha x} \\ &= (1+x)(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) + x(1+\frac{\alpha}{2}x+o(x)) \\ &= -x-\frac{x^2}{2}-x^2+o(x^2)+x+\frac{\alpha}{2}x^2+o(x^2)) \\ &= (\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2})x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ avrà ordine di infinitesimo pari a 2 per ogni $\alpha \neq 3$ e maggiore di 2 per $\alpha = 3$.

(2) La risposta corretta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \alpha x = 0 = f(0)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Mentre, ricordando che per $x \to 0$ risulta $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha < 1$.
Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \alpha$ e dunque che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \alpha$ per ogni α. Riguardo alla derivata destra, per $\alpha < 1$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

e quindi che la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$ per $\alpha < 0$ mentre $f'_+(0) = \frac{1}{2}$ per $\alpha = 0$. Ne segue che la funzione non risulta derivabile in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione è definita e continua in $[0, +\infty)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $f(0) = 0$ mentre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x(x-\alpha)} = +\infty.$$

Essendo inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(x-\alpha)}}{x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x(x-\alpha)}-x=-\frac{\alpha}{2}$$

ne deduciamo che per ogni $\alpha\in I\!\!R$ la funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y=x-\frac{\alpha}{2}$.

Se $\alpha\leq 0$, essendo in tal caso $|x-\alpha|=x-\alpha$ per ogni $x>0$, la funzione risulta derivabile in ogni $x\in(0,+\infty)$ con

$$f'(x)=\frac{2x-\alpha}{2\sqrt{x(x-\alpha)}}$$

Se invece $\alpha>0$, la funzione risulta derivabile in ogni $x\in(0,+\infty)\setminus\{\alpha\}$, infatti per $x=\alpha$ si ha

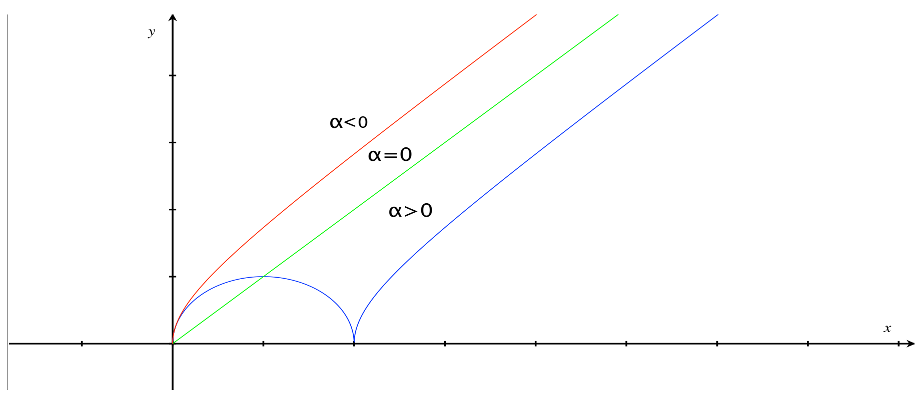
$$\lim_{h\to0^\pm}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to0^\pm}\frac{\sqrt{(\alpha+h)|h|}}{h}=\sqrt{\alpha}\lim_{h\to0^\pm}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\pm\infty.$$

mentre per $x\neq\alpha$ risulta

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2x-\alpha}{2\sqrt{x(x-\alpha)}} & \text{se } x>\alpha\\ \frac{\alpha-2x}{2\sqrt{x(\alpha-x)}} & \text{se } 0<x<\alpha\end{cases}$$

Ne deduciamo che se $\alpha\leq 0$, la funzione risulta strettamente crescente in $[0,+\infty)$ e dunque che $x=0$ risulta punto di minimo assoluto per $f(x)$.

Se $\alpha>0$, si ha invece che la funzione risulta strettamente crescente in $[0,\frac{\alpha}{2}]\cup[\alpha,+\infty)$ e strettamente decrescente in $[\frac{\alpha}{2},\alpha]$. Ne segue che $x=0$ e $x=\alpha$ sono punti di minimo assoluto mentre $x=\frac{\alpha}{2}$ risulta punto di massimo relativo.



(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int\frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}\,dx&=-\frac{\log(x+1)}{x+2}+\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx\\&=-\frac{\log(x+1)}{x+2}+\int\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\,dx\\&=-\frac{\log(x+1)}{x+2}+\log(x+1)-\log(x+2)+c\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{\log(x+1)}{x+2} + \log(x+1) - \log(x+2) \right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{\log(b+1)}{b+2} + \log\frac{b+1}{b+2} + \log 2 = \log 2
\end{aligned}
$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Utilizzando il Metodo del rapporto di D'Alembert abbiamo che il raggio di convergenza della serie è $\rho = +\infty$ in quanto, essendo $e^{x_n} - 1 \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, risulta

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{(n+1)!}} - 1}{e^{\frac{1}{n!}} - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.
$$

Ne segue allora che il raggio di convergenza è $\rho = +\infty$ e che la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque l'insieme di convergenza è $I = \mathbb{R}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 14/07/2011

1) La funzione $f(x) = e^{\alpha x^2} - \cosh x$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2)* La funzione $f(x) = \sqrt{|x|(x+\alpha)}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{b}}$ ammette due zeri
$\boxed{\text{c}}$ ammette un punto di massimo relativo
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'area minima delle ellissi di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ passanti per il punto $P(1,2)$ è

$\boxed{\text{a}}$ 4π
$\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{2}\pi$
$\boxed{\text{c}}$ π
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Si ricorda che l'area dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è pari a πab.

4) L'integrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{2+x}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(4-\pi)$
$\boxed{\text{b}}$ $2\sqrt{2}(\pi - 1)$
$\boxed{\text{c}}$ $\sqrt{2}(2-\pi)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5)* La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})}{n^\alpha}$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ se e solo se $\alpha \geq 0$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > -1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x^2} - \cosh x \\ &= 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2}{2}x^4 + o(x^4) - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4))) \\ &= (\alpha - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{24})x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ avrà ordine di infinitesimo pari a 2 per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$ e 4 per $\alpha = \frac{1}{2}$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione è definita e continua in $[-\alpha, +\infty)$ e per ogni $\alpha \in I\!R$ risulta $f(0) = f(-\alpha) = 0$ mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+\alpha)} = +\infty.$$

Essendo inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+\alpha)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+\alpha)} - x = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}} - 1) = \frac{\alpha}{2}$$

ne deduciamo che per ogni $\alpha \in I\!R$ la funzione ammette come asintoto obliquo la retta $y = x + \frac{\alpha}{2}$. [2]

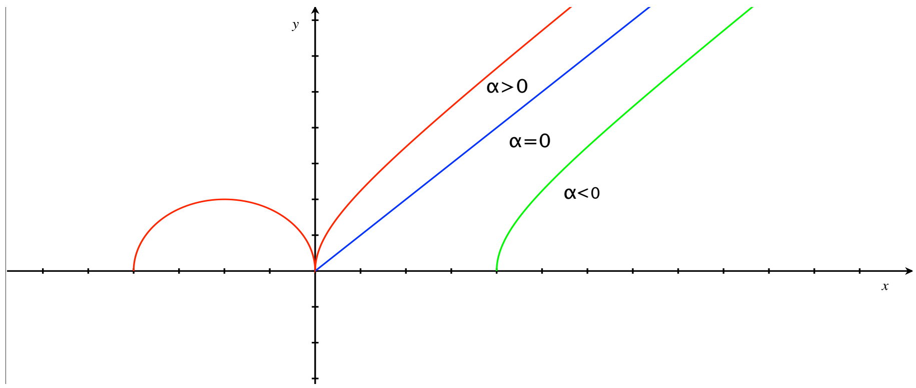
Risulta inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+\alpha}{2\sqrt{x^2+\alpha x}} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{2x+\alpha}{2\sqrt{-x^2-\alpha x}} & \text{se } -\alpha < x < 0 \end{cases}$$

Ne segue che se $\alpha > 0$ allora la funzione risulta strettamente crescente in $[-\alpha, -\frac{\alpha}{2}] \cup [0, +\infty)$e strettamente decrescente in $[-\frac{\alpha}{2}, 0]$. Ne segue che $x = 0$ e $x = \alpha$ sono punti di minimo assoluto mentre $x = -\frac{\alpha}{2}$ risulta punto di massimo relativo con $f(-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} > 0$. Mentre se $\alpha \leq 0$ allora $f(x)$ risulta strettamente crescente in tutto il suo dominio $[-\alpha, +\infty)$ e $x = -\alpha$ risulta punto di minimo assoluto.

---

[2] nota su un errore frequente: dal limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in I\!R$ non si può concludere che la funzione ammette un asintoto obliquo. Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = x + \sin x$, risulta $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ma non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sin x$, la funzione non ammette asintoto obliquo.



(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, dalla condizione che l'ellisse deve passare per il punto $P(1,2)$ otteniamo che $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ da cui $a=\frac{b}{\sqrt{b^2-4}}$. Ne segue che l'area delle ellissi considerate risulta pari a $A(b)=\frac{\pi b^2}{\sqrt{b^2-4}}$ per ogni $b\in(2,+\infty)$.
Cerchiamo quindi il minimo della funzione $A(b)$ nell'intervallo $(2,+\infty)$. La funzione risulta derivabile in $(2,+\infty)$ con

$$A'(b)=\frac{\pi b(b^2-8)}{(b^2-4)^{\frac{3}{2}}},\quad \forall b>2$$

e quindi $A'(b)>0$ se e solo se $b>\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Ne segue che $b_0=2\sqrt{2}$ è punto di minimo assoluto per $A(b)$ in $(2,+\infty)$ e dunque che l'area minima è data da $A(b_0)=4\pi$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, operando la sostituzione $t^2=x$, da cui $t=\sqrt{x}$ e $dx=2t\,dt$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{\sqrt{x}}{2+x}\,dx&=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2t^2}{2+t^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{2}}2-\frac{4}{2+t^2}\,dt\\&=2\int_0^{\sqrt{2}}1-\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}\,dt=2\left[t-\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(4-\pi).\end{aligned}$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ e $\sin x=x+o(x^2)$ per $x\to 0$, per $n\to+\infty$ risulta

$$\sin\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

e dunque che

$$\frac{\sin\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})}{n^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{\alpha+2}}.$$

Poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$ converge se e solo se $\alpha + 2 > 1$, ovvero $\alpha > -1$, dal criterio del confronto asintotico risulta che la serie data converge se e solo se $\alpha > -1$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 08/09/2011

1)* La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(e^{-\alpha n}+1)}{n^2}$, risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \log(\cos \alpha x) - x \sin x$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3)* La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ è continua solo per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'equazione $\arctan x = \alpha + x$ ammette una ed una sola soluzione

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha = 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \arctan \frac{x-1}{x+1}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 0
$\boxed{\text{b}}$ $\log \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ $\log 3$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, se $\alpha < 0$, essendo $e^{-\alpha n} \to +\infty$ per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{\log(e^{-\alpha n}+1)}{n^2} \sim \frac{-\alpha n}{n^2} = \frac{-\alpha}{n}$$

e poichè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, dal criterio del confronto asintotico risulta che anche la serie data diverge se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$ avremo invece

$$\frac{\log(e^{-\alpha n}+1)}{n^2} = \frac{\log 2}{n^2}$$

e poichè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, dal criterio del confronto asintotico risulta che anche la serie data converge. Infine, se $\alpha > 0$, poichè $e^{-\alpha n} \to 0$ per $n \to +\infty$ dal limite notevole del logaritmo risulta

$$\frac{\log(e^{-\alpha n}+1)}{n^2} \sim \frac{e^{-\alpha n}}{n^2} = \frac{1}{n^2 e^{\alpha n}}.$$

Per il Criterio del confronto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 e^{\alpha n}}$ converge per ogni $\alpha > 0$ essendo

$$\frac{1}{n^2 e^{\alpha n}} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in I\!N,\ \alpha > 0$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente. Quindi dal criterio del confronto asintotico concludiamo che la serie data converge se $\alpha > 0$.
Riunendo quanto ottenuto si ha che la serie data risulta convergente se e solo se $\alpha \geq 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, dai limiti notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(\cos(\alpha x)) - x\sin x = \log(1 + (\cos(\alpha x) - 1)) - x(x + o(x)) \\ &= (\cos(\alpha x) - 1) + o(\cos(\alpha x) - 1) - x^2 + o(x^2) \\ &= -\frac{(\alpha x)^2}{2} - x^2 + o(x^2) = -(1 + \frac{\alpha^2}{2})x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

ed essendo $1 + \frac{\alpha^2}{2} \neq 0$ per ogni $\alpha \in I\!R$ otteniamo che $f(x)$ avrà ordine di infinitesimo pari a 2 per ogni $\alpha \in I\!R$.

(3) La risposta corretta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \arctan(\beta x) = 0 = f(0)$$

per ogni $\beta \in I\!R$. Mentre, ricordando che per $x \to 0$ risulta $\sin x = x + o(x^2)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha - 1)x + o(x^2)}{x^2} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha = 1$.

Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \frac{\beta}{1+(\beta x)^2}$ e dunque che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\beta}{1+(\beta x)^2} = \beta, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = 1$, risulta che $f(x)$ è derivabile in ogni $x > 0$ con $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}$. Ricordando che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ otteniamo che la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 \cos x + \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{6}$.

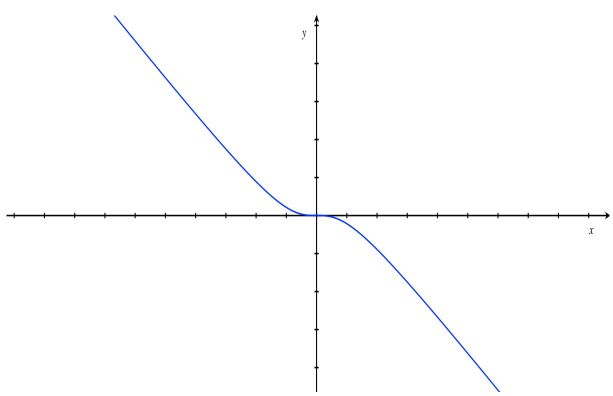
(4) La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Per determinare il numero di soluzione dell'equazione trascendente data sarà sufficiente studiare l'immagine della funzione $f(x) = \arctan x - x$. La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

Dal Teorema dei valori intermedi otteniamo allora che la funzione ha per immagine $\mathbb{R}$ e dunque che assume tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione risulta derivabile nel suo dominio con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che la funzione risulta strettamente crescente in tutto il suo dominio e dunque iniettiva. Ne deduciamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette una ed una sola soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.



(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \arctan\frac{x-1}{x+1}\,dx &= x\arctan\frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= x\arctan\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

e dunque

$$\int_0^1 \arctan\frac{x-1}{x+1}\,dx = \left[x\arctan\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 30/09/2011

1)* La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\,\alpha^n}$, con $\alpha > 0$, risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha > e$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = e^{\log^2(1+x)} - \sqrt{1+\alpha x^2}$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3)* La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha-1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x + \alpha & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ è continua in $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha = 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \log x - \log|x-1|$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{b}}$ è monotona
$\boxed{\text{c}}$ ammette un punto di flesso
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(2+2\sqrt{x}+x)}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $+\infty$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{\pi}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ π
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, applichiamo il Criterio del rapporto. Risulta

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,\alpha^{n+1}}\,\frac{n!\,\alpha^n}{n^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\alpha} \to \frac{e}{\alpha}, \quad n \to +\infty,$$

e dunque la serie converge se $\alpha > e$ e diverge se $\alpha < e$. Non possiamo invece dir nulla se $\alpha = e$.

NOTA: anche se non richiesto dall'esercizio, osserviamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$ diverge. Infatti, possiamo utilizzare la *Formula di Stirling*

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

ottenendo che $\frac{n^n}{n!e^n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. Dal Criterio del confronto segue allora che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$ diverge.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli di $\log(1+x)$ e di e^x per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
f(x) = e^{\log^2(1+x)} &= 1 + \log^2(1+x) + \frac{1}{2}\log^4(1+x) + o(\log^4(1+x)) \\
&= 1 + (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 + \frac{1}{2}(x + o(x))^4 + o((x+o(x))^4) \\
&= 1 + x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

e ricordando che

$$\sqrt{1+\alpha x^2} = 1 + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^4 + o(x^4)$$

otteniamo

$$f(x) = (1 - \frac{\alpha}{2})x^2 - x^3 + (\frac{3}{4} + \frac{\alpha^2}{8})x^4 + o(x^4)$$

da cui deduciamo che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo pari e 2 per ogni $\alpha \neq 2$ e pari a 3 per $\alpha = 2$.

(3) La risposta corretta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + \alpha = \alpha = f(0)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\alpha-1}{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 0$ e per $\alpha = 1$.

(4) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. La funzione è definita e continua in $D = \{x \in I\!R \,|\, x > 0,\ x \neq 1\}$ con

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \lim_{x\to 1} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log(\frac{x}{x-1}) = 0$$

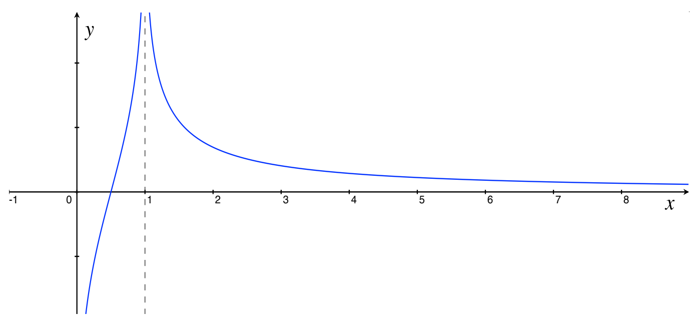
La funzione risulta derivabile nel suo dominio con

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(1-x)}, \quad \forall x \in D.$$

Ne segue che $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (0,1)$ e dunque che la funzione risulta strettamente crescente in $(0,1)$ e strettamente decrescente in $(1,+\infty)$. Infine, la funzione risulta derivabile due volte in D con

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

Quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$ e dunque $f(x)$ risulta convessa in $(\frac{1}{2},1)$ e $(1,+\infty)$ mentre risulta concava in $(0,1)$. Ne segue allora che $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso.



(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \sqrt{x}$ (da cui $x = t^2$ e $dx = 2tdt$) otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(2+2\sqrt{x}+x)}\,dx = 2\int \frac{1}{2+2t+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{1+(1+t)^2}\,dt$$
$$= 2\arctan(1+t) + c = 2\arctan(1+\sqrt{x}) + c, \quad c \in I\!R,$$

e dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(2+2\sqrt{x}+x)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[2\arctan(1+\sqrt{x})\right]_0^b$$
$$= 2\lim_{b\to+\infty} \arctan(1+\sqrt{b}) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$