Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 15/12/2008

1) La successione $a_n = \dfrac{n^{\alpha n}}{(2n)!}$ per $n \to +\infty$

a diverge per ogni $\alpha \geq 2$
b diverge per ogni $\alpha > 0$
c converge per ogni $\alpha \leq e$
d nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-e^{\alpha x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ \cos(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

a non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
b è derivabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha = -1$
c è derivabile solo per $-\alpha = \beta = 1$
d nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^{\alpha x} = x$

a non ammette soluzione per ogni $\alpha > 0$
b ammette un'unica soluzione per ogni $\alpha > 1$
c ammette due soluzioni per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{e}$
d nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - \mathrm{e}^{\alpha x^2}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

a 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b maggiore di 4 per almeno un $\alpha \in \mathbb{R}$
c 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
d nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan \frac{1}{x}\, dx$ vale

a $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\log 2$
b $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{6}$
c $+\infty$
d nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^\alpha} - \sqrt{1+2x}}{\sin x - \log(1+x)}\, dx$, con $\alpha > 0$, converge

a per ogni $\alpha > 0$
b solo per $\alpha = 1$
c per nessun $\alpha > 0$
d nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{n^{\alpha n}} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{(2n+1)(2n+2)}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\alpha n} \sim \frac{e^{\alpha}}{4n^{2-\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2\ , \\ \frac{e^2}{4} & \text{se } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Essendo $e^2 > 4$, dal criterio del rapporto deduciamo che per $n \to +\infty$, $a_n \to +\infty$ per ogni $\alpha \geq 2$ mentre $a_n \to 0$ per ogni $\alpha < 2$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(\beta x) = 1 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, essendo per $x \to 0$, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + o(x)$ e $e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - e^{\alpha x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\alpha x + o(x)}{x} = -\alpha$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = -1$.
Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = -\beta \sin(\beta x)$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$. Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = -1$, osservato che per $x \to 0$, risulta $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ mentre $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - e^{\alpha x}}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - e^{\alpha x} - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha = -1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Posto $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} - x$, studiamo la funzione $f_\alpha(x)$ e determiniamo il numero di zeri al variare di α, limitandoci a considerare il caso $\alpha > 0$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ con $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. La funzione risulta inoltre derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con

$$f'_\alpha(x) = \alpha e^{\alpha x} - 1$$

Dunque, avremo $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{\alpha}\log(\frac{1}{\alpha}) = x_\alpha$ e quindi che$f_\alpha(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, x_\alpha]$, strettamente crescente in $[x_\alpha, +\infty)$ e che x_α risulta punto di minimo assoluto per $f_\alpha(x)$ con $f_\alpha(x_\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 - \log\frac{1}{\alpha})$. Osservato che $f_\alpha(x_\alpha) < 0$ se $0 < \alpha < \frac{1}{e}$, $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ se $\alpha = \frac{1}{e}$ e $f_\alpha(x_\alpha) > 0$ se $\alpha > \frac{1}{e}$, dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia della funzione otteniamo che l'equazione $f_\alpha(x) = 0$ ammette due soluzioni se $0 < \alpha < \frac{1}{e}$, una

soluzione se $\alpha = \frac{1}{e}$ e nessuna soluzione se $\alpha > \frac{1}{e}$.
In alternativa, osservato che ogni eventuale soluzione dell'equazione $e^{\alpha x} = x$ risulta positiva, si poteva studiare l'equazione $\log x = \alpha x$ o equivalentemente l'equazione $\frac{\log x}{x} = \alpha$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, posto $y = \alpha x^2$ per $x \to 0$ si ottiene

$$e^{\alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2}{2} x^4 + o(x^4)$$

D'altra parte, poichè $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$ per $y \to 0$ mentre $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ per $x \to 0$, posto $y = \cos x - 1$ nel primo sviluppo, per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} &= 1 + \frac{\cos x - 1}{2} - \frac{(\cos x - 1)^2}{8} + o((\cos x - 1)^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) - \frac{1}{8}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2 + o((-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2) \\
&= 1 - \frac{1}{4}x^2 + (\frac{1}{48} - \frac{1}{32})x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4) - (1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2}{2}x^4 + o(x^4)) \\
&= -(\frac{1}{4} + \alpha)x^2 - (\frac{1}{96} + \frac{\alpha^2}{2})x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Ne segue che se $\alpha \neq -\frac{1}{4}$ allora $ord(f_\alpha(x)) = 2$ mentre se $\alpha = -\frac{1}{4}$ allora

$$f_\alpha(x) = -(\frac{1}{96} + \frac{1}{32})x^4 + o(x^4) = -\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

e $ord(f_\alpha(x)) = 4$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, ricordando che $D(\arctan \frac{1}{x}) = -\frac{1}{1+x^2}$, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int x^2 \arctan \frac{1}{x}\, dx &= \frac{x^3}{3} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \int x - \frac{x}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{6}(x^2 - \log(1+x^2)) + c
\end{aligned}$$

Quindi dalla Formula fondamentale del calcolo integrale e dalla definizione di integrale improprio si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \arctan\frac{1}{x}\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^2\arctan\frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^3}{3}\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{6}(x^2-\log(1+x^2))\right]_a^1\\ &= \lim_{a\to 0^+}\frac{\pi}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\log 2-\frac{a^3}{3}\arctan\frac{1}{a}-\frac{1}{6}(a^2-\log(1+a^2))\\ &= \frac{\pi}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\log 2\end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \frac{e^{x^\alpha}-\sqrt{1+2x}}{\sin x-\log(1+x)}$ è funzione continua in $(0,1]$, studiamone il comportamento per $x\to 0^+$ al variare di $\alpha>0$.
Per $x\to 0^+$, osserviamo che $e^{x^\alpha} = 1+x^\alpha+\frac{x^{2\alpha}}{2}+o(x^{2\alpha})$ mentre $\sqrt{1+2x} = 1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ e dunque

$$e^{x^\alpha}-\sqrt{1+2x} = x^\alpha+\frac{x^{2\alpha}}{2}+o(x^{2\alpha})-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) = \begin{cases} x+o(x) & \text{se } \alpha>1\ ,\\ x^\alpha+o(x^\alpha) & \text{se } 0<\alpha<1\\ x^2+o(x^2) & \text{se } \alpha=1\end{cases}$$

Inoltre, per $x\to 0^+$ si ha $\sin x = x+o(x^2)$ e $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ e quindi $\sin x-\log(1+x) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Ne segue che per $x\to 0^+$ risulta

$$f_\alpha(x)\sim\begin{cases}\frac{2}{x} & \text{se } \alpha>1\ ,\\ \frac{2}{x^{2-\alpha}} & \text{se } 0<\alpha<1\\ 2 & \text{se } \alpha=1\end{cases}$$

Essendo $2-\alpha>1$ per ogni $\alpha<1$, dal criterio del confronto asintotico deduciamo che per $\alpha\neq 1$ l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ diverge mentre se $\alpha=1$, essendo $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 2$, avremo che $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge .

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 13/01/2009

1) La successione $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^\alpha} - \sqrt[n]{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$ per $n \to +\infty$

[a] diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > 1$
[b] converge a 1 per ogni $\alpha \neq 1$
[c] converge a 0 per ogni $\alpha < 1$
[d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\alpha x) - \sin(x^2)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \sqrt[3]{1 + \beta x} - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

[a] non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
[b] è derivabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha = 1$
[c] è derivabile solo per $\alpha = \beta = 1$
[d] nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\log(1 - \frac{1}{x}) = \frac{\alpha}{x}$ con $\alpha > 0$ ammette soluzione positiva

[a] per ogni $\alpha > 0$
[b] per ogni $\alpha \neq 1$
[c] solo per $\alpha > 1$
[d] nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x}{1-x} - \log(1 + \arctan x)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

[a] 1
[b] 2
[c] maggiore di 2
[d] nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2 - 2x + 2)}{x^2}\, dx$ vale

[a] $+\infty$
[b] $\frac{\pi}{2}$
[c] $\frac{1}{2}\log 5 + \arctan 2 - \frac{\pi}{2}$
[d] nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sin(x^\alpha)}{x^2}\, dx$ converge

[a] per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
[b] solo per $\alpha = \frac{1}{2}$
[c] per nessun $\alpha > 0$
[d] nessuna delle precedenti

Traccia della soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$: per $n \to +\infty$ risulta $a_n \to +\infty$ per ogni $\alpha > 1$ essendo $\sqrt[n]{n^\alpha} - \sqrt[n]{n} \sim (\alpha - 1)\frac{\log n}{n}$ e $e^{\frac{1}{n}} - 1 =\sim \frac{1}{n}$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$: la funzione risulta continua in $x = 0$ con $f(0) = 0$ per $\alpha = \pm 1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$ mentre risulta derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$ per $\alpha = \pm 1$ e $\beta = 0$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: l'equazione ammette un'unica soluzione per ogni $\alpha \neq 1$, tale soluzione risulta positiva se $\alpha > 1$, negativa se $\alpha < 1$, non ammette soluzioni se $\alpha = 1$. Difatti la funzione $f_\alpha(x) = \log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{\alpha}{x+1}$ è tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to -1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. Se $\alpha \neq 1$, la funzione ammette un punto di minimo assoluto in $x_\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ con $f_\alpha(x_\alpha) < 0$, risulta $x_\alpha > 0$ se $\alpha > 1$ mentre $x_\alpha < -1$ se $\alpha < 1$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$: risulta $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ e quindi $ord(f(x)) = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$: risulta infatti $\int \frac{\log(x^2-2x+2)}{x^2}dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{x})\log(x^2 - 2x + 2) - \log|x| + \arctan(x - 1) + c$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$: infatti, posto $f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{x}-\sin(x^\alpha)}{x^2}$, per $x \to +\infty$ risulta $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per ogni $\alpha > 0$ e quindi $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha > 0$. Mentre per $x \to 0^+$ risulta:
se $\alpha > \frac{1}{2}$, $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ e quindi $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ diverge;
se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ ed essendo $2 - \alpha > \frac{3}{2}$, $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ diverge;
se $\alpha = \frac{1}{2}$, $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{6\sqrt{x}}$ e $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge.

Nota: La precedente è solo una traccia della risoluzione della prova, si consiglia di svolgere gli esercizi nei dettagli.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 24/03/2009

1) La successione $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^\alpha} - 1}{\sin(\frac{\log n}{n}) - \log(1 + \frac{1}{n})}$ per $n \to +\infty$

[a] diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > 1$
[b] converge a 1 per ogni $\alpha \neq 1$
[c] converge a 0 per ogni $\alpha < 1$
[d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2(x) - \cos(x^2)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \cos(x + \alpha) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

[a] non è continua per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[b] è derivabile solo per $\alpha = \pi$
[c] è derivabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[d] nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\arctan(\alpha x) = x$ con $\alpha > 0$ ammette

[a] 3 soluzioni per ogni $\alpha > 1$
[b] nessuna soluzione per ogni $\alpha < 1$
[c] un'unica soluzione per ogni $\alpha > 0$
[d] nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \frac{x^2}{1+x} - \alpha \log(\cos x)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

[a] 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[b] 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[c] maggiore di 3 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
[d] nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{x^2}\, dx$ vale

[a] $+\infty$
[b] $\frac{\pi}{4}$
[c] $\pi - \log 2$
[d] nessuna delle precedenti

6) L'area massima dei rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ è

[a] 2
[b] $2\sqrt{2}$
[c] 4
[d] nessuna delle precedenti

Traccia della soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$: per $n \to +\infty$ risulta $a_n \to \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ essendo $\sqrt[n]{n^\alpha} - 1 \sim \alpha \frac{\log n}{n}$ e $\sin(\frac{\log n}{n}) - \log(1 + \frac{1}{n}) = \frac{\log n}{n} + o(\frac{\log n}{n}) - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{\log n}{n}$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$: la funzione risulta continua in $x = 0$ con $f(0) = -1$ per ogni $\alpha = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tali valori di α la funzione risulta derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$: l'equazione ammette un'unica soluzione ($x = 0$) per ogni $\alpha \leq 1$ e ammette 3 soluzioni per ogni $\alpha > 1$. Difatti la funzione $f_\alpha(x) = \arctan(\alpha x) - x$ è tale che $\lim_{x \to \pm\infty} f_\alpha(x) = \mp\infty$ e risulta strettamente decrescente per $\alpha \leq 1$ mentre per $\alpha > 1$ ammette un punto di massimo relativo in $X_\alpha = \frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\alpha}$ con $f_\alpha(X_\alpha) > 0$ e un punto di minimo relativo in $x_\alpha = -\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}$ con $f_\alpha(x_\alpha) < 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$: risulta $f_\alpha(x) = (1 + \frac{\alpha}{2})x^2 - x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$ e quindi $ord(f_\alpha(x)) = 2$ per ogni $\alpha \neq -2$ e $ord(f_\alpha(x)) = 3$ per $\alpha = -2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$: risulta infatti $\displaystyle\int \frac{\arctan(x-1)}{x^2} dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{x}) \arctan(x - 1) + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{4} \log(x^2 - 2x + 2) + c$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: l'area massima si ottiene come massimo della funzione $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$ nell'intervallo $[0, 2]$. Tale massimo si ha nel punto $x = \sqrt{2}$ con $A(\sqrt{2}) = 4$.

Nota: La precedente è solo una traccia della risoluzione della prova, si consiglia di svolgere gli esercizi nei dettagli.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 14/04/2009

1) La successione $a_n = n^\alpha - n\log n + n^2\log(1+\dfrac{1}{n})$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{b}}$ converge a 1 per ogni $\alpha \neq 1$
$\boxed{\text{c}}$ converge a 0 per ogni $\alpha < 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x\cos x} - \cos x + \alpha x^2}{x} & \text{se } x > 0 \\ (1+x^2)^\beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è continua solo per $\alpha = 1$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = -1$ e $\beta = 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^{-|x^2-1|} = \alpha$ ammette due soluzioni positive

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ per ogni $0 < \alpha < 1$
$\boxed{\text{c}}$ per $\alpha > \frac{1}{e}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \sin x - x\cos x + \alpha\log(1+x^2)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 1 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ 3 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{2}{15}$
$\boxed{\text{b}}$ $-\frac{1}{5}$
$\boxed{\text{c}}$ 1
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}\,dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha \neq -\frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ risulta

$$a_n = n^\alpha - n\log n + n^2(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = n^\alpha - n\log n + n + o(n)$$

Quindi se $\alpha > 1$ risulta $n = o(n^\alpha)$ e dunque, dal limite notevole $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\beta} = 0$ per ogni $\beta > 0$, otteniamo

$$a_n = n^\alpha - n\log n + o(n^\alpha) = n^\alpha(1 - n^{1-\alpha}\log n + \frac{o(n^\alpha)}{n^\alpha}) \to +\infty$$

Se $\alpha = 1$ risulta

$$a_n = 2n - n\log n + o(n) = n(2 - \log n + \frac{o(n)}{n}) \to -\infty$$

mentre se $\alpha < 1$ risulta $n^\alpha = o(n)$ e dunque

$$a_n = n - n\log n + o(n) = n(1 - \log n + \frac{o(n)}{n}) \to -\infty$$

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli si ha

$$\begin{aligned}
e^{x\cos x} &= 1 + x\cos x + \frac{1}{2}(x\cos x)^2 + o((x\cos x)^2) \\
&= 1 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)))^2 + o((x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)))^2) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{1}{2}(x^2(1 - x^2 + o(x^2))) + o(x^2(1 - x^2 + o(x^2))) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

e quindi

$$e^{x\cos x} - \cos x + \alpha x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \alpha x^2 = x + (\alpha+1)x^2 + o(x^2)$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\cos x} - \cos x + \alpha x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + (\alpha+1)x^2 + o(x^2)}{x} = 1$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + x^2)^\beta = 1 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, si ottiene che $f(x)$ risulta continua in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Riguardo alla derivabilità osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x<0$ con $f'(x) = 2\beta x(1+x^2)^{\beta-1}$ e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$. Riguardo alla derivata destra, dallo sviluppo precedentemente ottenuto si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{x\cos x}-\cos x+\alpha x^2}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\cos x} - \cos x + \alpha x^2 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha+1)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \alpha + 1.\end{aligned}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = \alpha + 1$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = -1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Posto $f(x) = e^{-|x^2-1|}$, determiniamo il numero di soluzioni positiva dell'equazione $f(x) = \alpha$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. La funzione risulta inoltre derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$, con

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 2xe^{x^2-1} & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Dunque, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e quindi che$f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, -1]$ e in $[0, 1]$, strettamente crescente in $[-1, 0]$ e in $[1, +\infty)$. Quindi $x_0 = 1$ risulta punto di minimo relativo per $f(x)$ con $f(0) = e^{-1}$, mentre $x_\pm = \pm 1$ risultano punti di massimo assoluto per $f(x)$ con $f(\pm 1) = 1$.

Dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia della funzione otteniamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette due soluzioni (una positiva e una negativa) se $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ e $\alpha = 1$, tre soluzioni (una positiva, una negativa e una nulla) se $\alpha = \frac{1}{e}$, quattro soluzioni (due positive e due negative) se $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ e nessuna soluzione se $\alpha \leq 0$ e $\alpha > 1$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\sin x - x\cos x + \alpha \log(1+x^2) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + \alpha(x^2 + o(x^3)) \\ &= \alpha x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Ne segue che se $\alpha \neq 0$ allora $ord(f_\alpha(x)) = 2$ mentre se $\alpha = 0$ allora $ord(f_\alpha(x)) = 3$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \sqrt{1-x^2}$ (da cui $dx = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$), si ottiene

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 t^2(t^2-1)\,dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}$ è funzione continua in $(0,1]$, studiamone il comportamento per $x \to 0^+$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. A tale scopo osserviamo che

$$e^{\alpha x} - \sqrt{1-x} = \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + x + \frac{x^2}{8} + o(x^2) = (\alpha + \frac{1}{2})x + (\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{8})x^2 + o(x^2)$$

Risulta allora

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{(\alpha+\frac{1}{2})\sqrt{x}} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \ , \\ \frac{4}{x^{3/2}} & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico deduciamo che per $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ l'integrale converge mentre se $\alpha = -\frac{1}{2}$ l'integrale diverge .

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 30/06/2009

1) La successione $a_n = n^\alpha \sin \dfrac{1}{n} - n^3 \log n$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha \geq 4$
$\boxed{\text{b}}$ diverge a $-\infty$ per ogni $\alpha \leq 4$
$\boxed{\text{c}}$ converge a 0 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - \alpha \log(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^{\beta x} - e^{-\beta x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per $\alpha = 1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $|\log x| = \alpha x^2$, con $\alpha > 0$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ due soluzioni per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ due soluzioni per ogni $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ tre soluzioni per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{2e}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \cos^2 x - \sqrt{1 - 2x^\alpha}$, $\alpha > 0$, per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ minore di 2 per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} |x - \pi| \cos x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 4
$\boxed{\text{b}}$ 0
$\boxed{\text{c}}$ 2π
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + x^\alpha} - \cos \frac{1}{x}}{x^2} \, dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha \leq -2$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha < 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Traccia della soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$: infatti per $n \to +\infty$ si ha $a_n = n^3(n^{\alpha-4} + o(n^{\alpha-4}) - \log n) \to -\infty$ per ogni $\alpha \leq 4$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$: essendo $xe^x - \alpha \log(1+x) = (1-\alpha)x + (1+\frac{\alpha}{2})x^2 + o(x^2)$, la funzione risulta continua in $x = 0$ con $f(0) = 0$ per $\alpha = 1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre la funzione risulta derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = \frac{3}{2}$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{3}{4}$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: l'equazione ammette un'unica soluzione (in $(0,1)$) per ogni $\alpha > \frac{1}{2e}$, due soluzioni per $\alpha = \frac{1}{2e}$ e 3 soluzioni per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{2e}$.
Difatti la funzione $f_\alpha(x) = |\log x| - \alpha x^2$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to0^+} f_\alpha(x) = +\infty$. La funzione risulta strettamente decrescente per $\alpha \geq \frac{1}{2}$ mentre per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ammette un punto di massimo relativo in $X_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ con $f_\alpha(X_\alpha) > 0$ se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{2e}$ e un punto di minimo relativo in 1 con $f(1) = -\alpha < 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: per $x \to 0$ risulta $f_\alpha(x) = -x^2 + \frac{7}{24}x^4 + o(x^4) + x^\alpha + \frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})$ e quindi $ord(f_\alpha(x)) = 2$ per ogni $\alpha > 2$, $ord(f_\alpha(x)) = \alpha$ per ogni $\alpha < 2$ e $ord(f_\alpha(x)) = 4$ per $\alpha = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$: risulta infatti

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |x-\pi|\cos x\,dx &= \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos x\,dx + \int_\pi^{2\pi} (x-\pi)\cos x\,dx \\ &= [(\pi - x)\sin x - \cos x]_0^\pi + [(x-\pi)\sin x + \cos x]_\pi^{2\pi} = 4\end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: difatti per $x \to +\infty$ risulta

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{2-\frac{\alpha}{2}}} & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{\sqrt{2}-1}{x^2} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{1}{2x^{2-\alpha}} & \text{se } -2 < \alpha < 0 \\ -\frac{1}{12x^6} & \text{se } \alpha = -2 \\ -\frac{1}{2x^4} & \text{se } \alpha < -2 \end{cases}$$

Nota: La precedente è solo una traccia della risoluzione della prova, si consiglia di svolgere gli esercizi nei dettagli.

Analisi Matematica 1

seconda prova scritta del 15/07/2009

1) La successione $a_n = n\log(1+n^\alpha) - n^2 \sin\dfrac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ diverge a $-\infty$ per ogni $\alpha \leq 0$

$\boxed{\text{c}}$ converge a 0 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \arctan x - x \sin x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{1+\beta x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per $\alpha = 1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f_\alpha(x) = \log|x-1| + \alpha x$, con $\alpha > 0$, ammette uno zero in $(-\infty, 0)$

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha > 0$

$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $g_\alpha(x) = \sin^2 x - \log(1+x^\alpha)$, $\alpha > 0$, per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ minore di 2 per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^\pi |\sin x - \frac{1}{2}| \cos x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 1/4

$\boxed{\text{b}}$ 1/2

$\boxed{\text{c}}$ 0

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^\alpha}+x^2}\, dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha < 2$

$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha \leq 0$

$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha > 4$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Traccia della soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$: infatti per $n \to +\infty$, se $\alpha < 0$ risulta $a_n = -n + o(n) \to -\infty$ mentre se $\alpha = 0$ allora $a_n = (\log 2 - 1)n + o(n) \to -\infty$ e infine se $\alpha > 0$ allora $a_n = n(\alpha \log n - 1) + o(n) \to +\infty$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$: essendo $\alpha \arctan x - x \sin x = \alpha x - x^2 + o(x^2)$, la funzione risulta continua in $x = 0$ con $f(0) = 1$ per $\alpha = 1$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre la funzione risulta derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = -1$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = -2$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: la funzione ammette un unico zero in $(-\infty, 0)$ se $0 < \alpha < 1$ e nessun zero in $(-\infty, 0)$ se $\alpha \geq 1$.
Difatti, limitandoci allo studio della funzione in $(-\infty, 0]$, risulta $\lim\limits_{x \to -\infty} f_\alpha(x) = -\infty$ e $f(0) = 0$. Se $\alpha \geq 1$, la funzione risulta strettamente crescente in $(-\infty, 0]$ e dunque $f_\alpha(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$. Se invece $0 < \alpha < 1$, la funzione risulta strettamente crescente in $(-\infty, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$ e strettamente decrescente in $[\frac{\alpha-1}{\alpha}, 0]$. Dunque $x_\alpha = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ risulta punto di massimo assoluto per $f_\alpha(x)$ in $(-\infty, 0]$ con $f_\alpha(x_\alpha) > 0$ e dunque esiste $\bar{x} \in (-\infty, 0)$ tale che $f_\alpha(\bar{x}) = 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: per $x \to 0$ risulta $g_\alpha(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^\alpha + \frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})$ e quindi $ord(f_\alpha(x)) = 2$ per ogni $\alpha > 2$, $ord(f_\alpha(x)) = \alpha$ per ogni $\alpha < 2$ e $ord(f_\alpha(x)) = 4$ per $\alpha = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: risulta infatti

$$\int_0^\pi |\sin x - \frac{1}{2}| \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\frac{1}{2} - \sin x) \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\sin x - \frac{1}{2}) \cos x \, dx +$$
$$+ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} (\frac{1}{2} - \sin x) \cos x \, dx = \frac{1}{2} \left[\sin x - \sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} +$$
$$+ \frac{1}{2} \left[\sin^2 x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \frac{1}{2} \left[\sin x - \sin^2 x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} = 0$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$: difatti per $x \to +\infty$ risulta

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } \alpha < 4 \\ \frac{1}{2x} & \text{se } \alpha = 4 \\ \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}-1}} & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

Nota: La precedente è solo una traccia della risoluzione della prova, si consiglia di svolgere gli esercizi nei dettagli.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 10/09/2009

1) La successione $a_n = \dfrac{\sqrt{1+n^\alpha}-1}{\sin\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > -1$

$\boxed{\text{b}}$ converge a $\sqrt{2}-1$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ converge a 0 per ogni $\alpha < 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\alpha x) - \cos(x^2)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{1+\beta x} - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ non è derivabile per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ è derivabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha = 0$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = \beta = 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\log x = \alpha x^2$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ due soluzioni per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ una sola soluzione per qualche $\alpha > 0$

$\boxed{\text{c}}$ nessuna soluzione per ogni $\alpha \leq 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \frac{x}{1-x} - \sin(\arctan x)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 1

$\boxed{\text{b}}$ 2

$\boxed{\text{c}}$ maggiore di 2

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x - \frac{1}{2}| \sin x \, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 1/2

$\boxed{\text{b}}$ 2

$\boxed{\text{c}}$ 0

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin(x^\alpha)}{x^3} \, dx$ con $\alpha > 0$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 2$

$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha = 1$

$\boxed{\text{c}}$ per nessun $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Traccia della soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{d}$: infatti per $n \to +\infty$, se $\alpha < 0$ risulta $a_n \sim n^{\alpha+2}$ mentre se $\alpha = 0$ allora $a_n \sim 2n^2(\sqrt{2} - 1)$ e infine se $\alpha > 0$ allora $a_n = 2n^{\frac{\alpha}{2}+2}$. Dunque $a_n \to +\infty$ per $\alpha > -2$, $a_n \to 1$ se $\alpha = -2$ e $a_n \to 0$ se $\alpha < -2$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{c}$: essendo $\cos^2(\alpha x) - \cos(x^2) = -\alpha^2 x^2 + o(x^2)$, la funzione risulta continua in $x = 0$ con $f(0) = 0$ solo per $\alpha = 0$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $\alpha = 0$ risulta $\cos^2(\alpha x) - \cos(x^2) = 1 - \cos(x^2) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ e dunque la funzione risulta derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$ solo per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{b}$: l'equazione ammette un' unica soluzione per $\alpha \leq 0$ e per $\alpha = \frac{1}{2e}$. Difatti, considerando la funzione $f_\alpha(x) = \log x - \alpha x^2$, definita in $(0, +\infty)$, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

mentre $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \leq 0$, la funzione risulta strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e dunque $f_\alpha(x)$ ammette un unico zero in $(0, +\infty)$. Se invece $\alpha > 0$, la funzione risulta strettamente crescente in $(0, \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}]$ e strettamente decrescente in $[\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, +\infty)$. Dunque $x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ risulta punto di massimo assoluto per $f_\alpha(x)$ con $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ se $\alpha = \frac{1}{2e}$, $f_\alpha(x_\alpha) < 0$ se $0 < \alpha < \frac{1}{2e}$ mentre $f_\alpha(x_\alpha) > 0$ se $\alpha > \frac{1}{2e}$. Ne segue che per $\alpha > 0$, $f_\alpha(x)$ ammette un unico zero solo per $\alpha = \frac{1}{2e}$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{b}$: per $x \to 0$ risulta $f_\alpha(x) = x^2 + o(x^2)$ e quindi $ord(f_\alpha(x)) = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{d}$: risulta infatti

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |\cos x - \frac{1}{2}| \sin x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \frac{1}{2}) \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^\pi (\frac{1}{2} - \cos x) \sin x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin^2 x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\left[\sin^2 x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{b}$: difatti per $x \to +\infty$ si ha $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per ogni $\alpha > 0$ e dunque $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge per ogni $\alpha > 0$. Mentre per $x \to 0$ risulta

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} -\frac{1}{x^{3-\alpha}} & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e quindi l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ converge solo per $\alpha = 1$.

Nota: La precedente è solo una traccia della risoluzione della prova, si consiglia di svolgere gli esercizi nei dettagli.