Analisi Matematica 1
Seconda Prova Scritta del 17/12/2007

1) La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-2n}$ per $n \to +\infty$ converge

[a] per ogni $\alpha \in I\!R$
[b] per nessun $\alpha \in I\!R$
[c] solo per $\alpha > 0$
[d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{\cos x} + \alpha x}{\log(1+x)} & \text{se } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ \arctan \beta x & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

[a] è derivabile per ogni $\beta \in I\!R$ e $\alpha = -1$
[b] non è continua per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
[c] non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
[d] nessuna delle precedenti

3) La funzione $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha + \log x}{1 - \log x}$

[a] per ogni $\alpha \in I\!R$ non ammette zeri
[b] per ogni $\alpha > -1$ ha per immagine $I\!R$
[c] per ogni $\alpha \neq -1$ è iniettiva
[d] nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = e^{\sqrt{1+x}-1} - \sqrt{1+x}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

[a] 1
[b] 3
[c] 2
[d] nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x^2}\, dx$ vale

[a] $\frac{3}{2}\log 3$
[b] $\frac{1}{2}\log 3$
[c] $+\infty$
[d] nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x + \arctan(x^\alpha)}\, dx$, con $\alpha > 0$,

[a] diverge per ogni $\alpha > 0$
[b] converge se e solo se $\alpha < 1$
[c] converge solo per $\alpha > 2$
[d] nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Osservato che $a_n = e^{-2n\log(1+\frac{1}{n^\alpha})}$, studiamo il comportamento della successione $b_n = -2n\log(1+\frac{1}{n^\alpha})$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha < 0$ allora $\frac{1}{n^\alpha} \to +\infty$, da cui $\log(1+\frac{1}{n^\alpha}) \to +\infty$ e dunque $b_n \to -\infty$. Ne segue che $a_n = e^{b_n} \to 0$.
Se $\alpha = 0$ allora $\log(1+\frac{1}{n^\alpha}) = \log 2 > 0$ e dunque $b_n \to -\infty$. Ne segue che anche in questo caso $a_n = e^{b_n} \to 0$.
Infine, se $\alpha > 0$ allora $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ e ricordando che $\log(1+x_n) \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, otteniamo che per $n \to +\infty$ risulta

$$b_n = -2n\log(1+\frac{1}{n^\alpha}) \sim -2n\frac{1}{n^\alpha} = -\frac{2}{n^{\alpha-1}}$$

Ne segue che se $\alpha > 1$ allora $b_n \to 0$ e quindi $a_n = e^{b_n} \to 1$. Se $\alpha = 1$ allora $b_n \to -2$ da cui $a_n = e^{b_n} \to e^{-2}$ mentre se $0 < \alpha < 1$ allora $b_n \to -\infty$ e quindi $a_n = e^{b_n} \to 0$. Riunendo quanto ottenuto abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ e^{-2} & \text{se } \alpha = 1 \\ 1 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

e dunque la successione converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \arctan(\beta x) = 0 = f(0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, ricordando che per $y \to 0$, $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ e che per $x \to 0$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, otteniamo

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)} = 1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1) + o(\cos x - 1) = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

da cui, essendo per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si ottiene

$$e^x - \sqrt{\cos x} + \alpha x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) + \alpha x = (1+\alpha)x + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$$

Quindi, se $\alpha \neq -1$, $e^x - \sqrt{\cos x} + \alpha x = (1+\alpha)x + o(x)$ da cui, essendo $\log(1+x) = x + o(x)$,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x - \sqrt{\cos x} + \alpha x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{(1+\alpha)x + o(x)}{x + o(x)} = 1 + \alpha \neq 0$$

ed $f(x)$ non risulta continua in 0. Se invece $\alpha = -1$ allora $e^x - \sqrt{\cos x} - x = \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$ da cui

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x - \sqrt{\cos x} - x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} = 0$$

e la funzione risulterà continua in 0. Dunque $f(x)$ risulta continua in 0 solo per $\alpha = -1$ ed ogni $\beta \in \mathbb{R}$.
Riguardo alla derivabilità, se $x < 0$ allora $f(x)$ è derivabile con $f'(x) = \frac{\beta}{1+\beta^2x^2}$ e dunque $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \beta$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con

$f'_-(0) = \beta$. Riguardo alla derivata destra, osservato che la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\alpha = -1$, ci limiteremo a considerare solo questo caso. Abbiamo allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \sqrt{\cos x} - x}{x \log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{4}$$

e la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = \frac{3}{4}$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x = 0$ solo per $\alpha = -1$ e $\beta = \frac{3}{4}$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione è definita e continua in $(0, e) \cup (e, +\infty)$. Osserviamo inoltre che se $\alpha = -1$ allora $f_\alpha(x) = -1$ per ogni $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$. Per $\alpha \neq -1$ si ha invece

$$\lim_{x\to +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\alpha}{\log x} + 1}{\frac{1}{\log x} - 1} = -1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha}{\log x} + 1}{\frac{1}{\log x} - 1} = -1$$

Inoltre

$$\lim_{x\to e^-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{\alpha + \log x}{1 - \log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

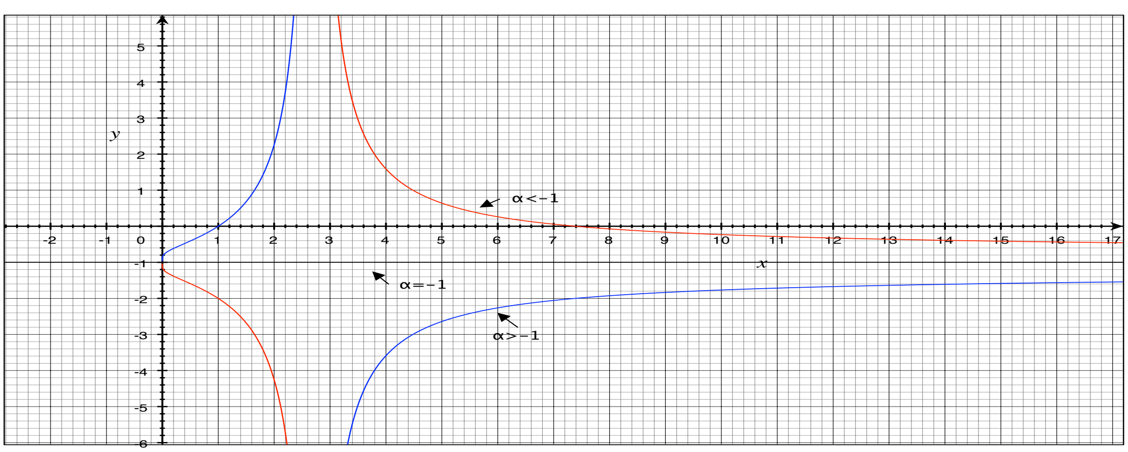
mentre

$$\lim_{x\to e^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{\alpha + \log x}{1 - \log x} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

Riguardo alla monotonia, osserviamo che per ogni $\alpha \neq -1$ la funzione è derivabile in ogni $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ con

$$f'_\alpha(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \log x) + \frac{1}{x}(\alpha + \log x)}{\log^2 x} = \frac{1+\alpha}{x \log^2 x}$$

Se $\alpha > -1$, avremo allora $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ e dunque che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(0, e)$ e in $(e, +\infty)$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è iniettiva in $(0, e)$ e in $(e, +\infty)$. Essendo inoltre, per ogni $x \in (0, e)$ e $y \in (e, +\infty)$, $f_\alpha(x) > -1 > f_\alpha(y)$, ne deduciamo che $f_\alpha(x)$ è iniettiva in $(0, e) \cup (e, +\infty)$.
Analogalmente, se $\alpha < -1$, avremo $f'_\alpha(x) < 0$ per ogni $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ e dunque che $f_\alpha(x)$ è strettamente decrescente in $(0, e)$ e in $(e, +\infty)$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è iniettiva in $(0, e)$ e in $(e, +\infty)$. Essendo inoltre per ogni $x \in (0, e)$ e $y \in (e, +\infty)$, $f_\alpha(x) < -1 < f_\alpha(y)$, ne deduciamo che $f_\alpha(x)$ è iniettiva in $(0, e) \cup (e, +\infty)$.



(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, posto $y = \sqrt{1+x} - 1$, per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1+x}-1} - \sqrt{1+x} &= 1 + (\sqrt{1+x} - 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1)^2 + o((\sqrt{1+x} - 1)^2) - \sqrt{1+x} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1)^2 + o((\sqrt{1+x} - 1)^2) \end{aligned}$$

Essendo $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \to 0$, si ottiene

$$e^{\sqrt{1+x}-1} - \sqrt{1+x} = \frac{1}{2}(\frac{x}{2} + o(x))^2 + o((\frac{x}{2} + o(x))^2) = \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Quindi $ord(f(x)) = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(x^2-1)}{x^2} dx &= -\frac{\log(x^2-1)}{x} + \int \frac{2}{x^2-1} dx \\ &= -\frac{\log(x^2-1)}{x} + \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{\log(x^2-1)}{x} + \log|x-1| - \log|x+1| + c = \\ &= -\frac{\log(x^2-1)}{x} + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c \end{aligned}$$

Quindi, utilizzando i limiti notevoli coinvolgenti il logaritmo, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{\log(x^2-1)}{x^2} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{\log(x^2-1)}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{\log(x^2-1)}{x} + \log\frac{x-1}{x+1}\right]_2^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} -\frac{\log(b^2-1)}{b} + \log\frac{b-1}{b+1} + \frac{\log 3}{2} - \log\frac{1}{3} = \frac{3}{2}\log 3 \end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Osservato che l'integranda $f_\alpha(x) = \dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{x - \arctan(x^\alpha)}$ risulta continua in $(0, +\infty)$, avremo che l'integrale improprio dato risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$. Studiamo separatamente il comportamento dei due integrali al variare di $\alpha > 0$.

Per $x \to +\infty$, osserviamo che essendo $\alpha > 0$, $\arctan(x^\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ e dunque che $x + \arctan(x^\alpha) \sim x$ per ogni $\alpha > 0$. Osservato inoltre che $\arctan\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$, otteniamo che per ogni $\alpha > 0$ risulta $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^2}$ e dunque, dal criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha > 0$.

Per $x \to 0^+$, osserviamo innanzitutto che $\arctan\frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$. Riguardo al denominatore, per $\alpha > 0$, ricordando che $\arctan y = y + o(y)$ per $y \to 0$, otteniamo che $x + \arctan x^\alpha = x + x^\alpha + o(x^\alpha)$.

Allora, se $\alpha > 1$ avremo $x + \arctan x^\alpha = x + o(x) \sim x$ e quindi $f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}$ e dal criterio del confronto asintotico l'integrale diverge.
Se $\alpha = 1$ allora $x + \arctan x^\alpha = 2x + o(x) \sim 2x$ e quindi $f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{2x}$ e dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che l'integrale diverge.
Infine, se $0 < \alpha < 1$ allora $x + \arctan x^\alpha = x^\alpha + o(x^\alpha) \sim x^\alpha$ e da cui $f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha}$ e dal criterio del confronto asintotico, essendo $\alpha < 1$, otteniamo che l'integrale converge.

Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 1$.

Analisi Matematica 1

seconda prova scritta del 11/01/2008 – $\boxed{\text{A}}$

1) La successione $a_n = \frac{n^n}{n!\,a^{n^2}}$ con $a > 0$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0 per ogni $a < e$

$\boxed{\text{b}}$ converge a 0 per ogni $a > 1$

$\boxed{\text{c}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $a > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin x - \cos x + \alpha}{\arctan x} & \text{se } x > 0 \\ e^{\beta x} - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è derivabile per ogni $\beta \in I\!\!R$ e $\alpha = 1$

$\boxed{\text{b}}$ non è continua per ogni $\alpha, \beta \in I\!\!R$

$\boxed{\text{c}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!\!R$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\alpha x^2 - \log(1 + x^2) = 0$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ due soluzioni per ogni $\alpha \geq 1$

$\boxed{\text{b}}$ una sola soluzione per ogni $\alpha \in I\!\!R$

$\boxed{\text{c}}$ tre soluzioni per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \log(\sin x + 1) - \alpha \sin x$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 1 per ogni $\alpha \in I\!\!R$

$\boxed{\text{b}}$ 3 per ogni $\alpha \in I\!\!R$

$\boxed{\text{c}}$ 2 per qualche $\alpha \in I\!\!R$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{2}\log 2$

$\boxed{\text{b}}$ $-\frac{1}{2}\log 2$

$\boxed{\text{c}}$ $+\infty$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + x^2)}{x^\alpha(e^x - 1)}\, dx$,

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in I\!\!R$

$\boxed{\text{b}}$ converge se e solo se $\alpha < 2$

$\boxed{\text{c}}$ diverge per ogni $\alpha < 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!a^{(n+1)^2}} \frac{n!a^{n^2}}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{a^{2n+1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ e & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Dunque, dal criterio del rapporto per successioni positive, la successione converge a 0 per ogni $a > 1$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\beta x} - 1 = 0 = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, ricordando che per $x \to 0$, $\sin x = x + o(x)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, per $x \to 0^+$ otteniamo

$$x \sin x - \cos x + \alpha = x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \alpha = \alpha - 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

ed essendo $e^x - 1 = x + o(x)$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \sin x - \cos x + \alpha}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha - 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

ed $f(x)$ risulterà continua in 0 solo per $\alpha = 1$.
Riguardo alla derivabilità, osservato che $f(x)$ risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta e^{\beta x}$ e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$,. si ha che, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Riguardo alla derivata destra, osservato che la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\alpha = 1$, ci limiteremo a considerare solo questo caso. Da quanto ottenuto sopra abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \sin x - \cos x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}$$

e quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = \frac{3}{2}$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{3}{2}$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Determiniamo il numero di zeri della funzione $f_\alpha(x) = \alpha x^2 - \log(1 + x^2)$. Osserviamo innanzitutto che la funzione risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}$. Poichè inoltre risulta pari, potremo allora limitare lo studio all'intervallo $[0, +\infty)$. Risulta $f_\alpha(0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e, dalla gerarchia degli infiniti,

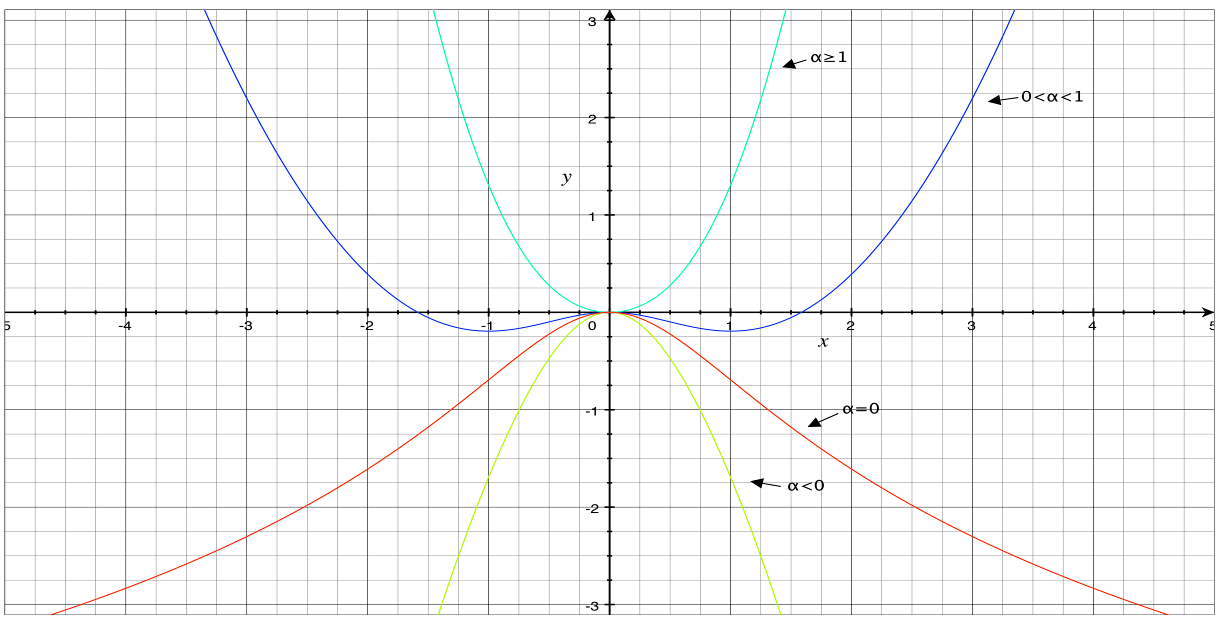
$$\lim_{x\to +\infty} f_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione risulta inoltre in $\mathbb{R}$ con

$$f'_\alpha(x) = 2\alpha x - \frac{2x}{1+x^2} = 2x(\alpha - \frac{1}{1+x^2})$$

Per $x \in (0, +\infty)$, risulta allora che $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{1+x^2} < \alpha$.

Se $\alpha \leq 0$ avremo allora che $f'_\alpha(x) < 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$ e dunque che $f_\alpha(x)$ è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$.
Se $\alpha > 0$, allora $f'_\alpha(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ se e solo se $x^2 > \frac{1}{\alpha} - 1$. Dunque, se $\alpha \geq 1$, avremo che $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$ e dunque che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Se invece $0 < \alpha < 1$, avremo che $f'_\alpha(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ se e solo se $x > \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} = x_\alpha$ e quindi che $f_\alpha(x)$ risulta strettamente crescente in $[x_\alpha, +\infty)$, strettamente decrescente in $[0, x_\alpha]$ e che x_α è punto di minimo con $f_\alpha(x_\alpha) = 1 - \alpha + \log \alpha$. Osserviamo inoltre che essendo la funzione strettamente decrescente in $[0, x_\alpha]$ e che $f(0) = 0$ si ha $f_\alpha(x_\alpha) < 0$ (in alternativa si poteva osservare che essendo $\log x$ funzione concava e $y = x - 1$ retta tangente a $\log x$ in $x = 1$, risulta $\log \alpha < \alpha - 1$ per ogni $\alpha \neq 1$).



Riunendo quanto ottenuto, dal Teorema di esistenza degli zeri e dallo studio della monotonia, deduciamo che $f_\alpha(x)$ ammette un unico zero, $x = 0$, per ogni $\alpha \leq 0$ e ogni $\alpha \geq 1$ mentre ammette tre zeri se $0 < \alpha < 1$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, posto $y = \sin x$, per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \log(1 + \sin x) - \alpha \sin x = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) - \alpha \sin x \\ &= (1 - \alpha) \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) \end{aligned}$$

Infine, essendo $\sin x = x + o(x^2)$ per $x \to 0$, si ottiene

$$f_\alpha(x) = (1 - \alpha)x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi, se $\alpha \neq 1$ allora $ord(f_\alpha(x)) = 1$ mentre per $\alpha = 1$ risulta $ord(f_\alpha(x)) = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx &= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \int \frac{1}{x}\frac{2}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}dx \\ &= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx \\ &= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \log|x| - \log\sqrt{x^2+1} + c\end{aligned}$$

Quindi, dalla formula fondamentale del calcolo integrale otteniamo

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \log x - \log\sqrt{x^2+1}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{b-1}{b+1}\right) + \log\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Osservato che l'integranda $f_\alpha(x) = \dfrac{\log(1+x^2}{x^\alpha(e^x-1)}$ risulta continua in $(0,+\infty)$, avremo che l'integrale improprio dato risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$. Studiamo separatamente il comportamento dei due integrali al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \to +\infty$, osserviamo che dalla gerarchia degli infiniti risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^{\alpha-p}(e^x-1)} = 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $p > 1$ e dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \to 0^+$, osservato che $\log(1+x^2) \sim x^2$ e che $e^x - 1 \sim x$, otteniamo

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^2}{x^\alpha x} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

e dal criterio del confronto asintotico l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge se e solo se $\alpha < 2$. Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 2$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 11/01/2008 – $\boxed{\text{B}}$

1) La successione $a_n = \frac{n^n}{(2n)!\, a^n}$ con $a > 0$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0 per ogni $a > 0$

$\boxed{\text{b}}$ converge a 1 per ogni $a < 1$

$\boxed{\text{c}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $a > 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x\log(1+x)+e^{x^2}-\alpha}{\sqrt{1+2x}-1} & \text{se } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è derivabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha = -1$

$\boxed{\text{b}}$ non è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^{\alpha x^2} - x^2 = 0$, $\alpha > 0$, ammette

$\boxed{\text{a}}$ due soluzioni per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ una sola soluzione per ogni $\alpha > \frac{1}{e}$

$\boxed{\text{c}}$ nessuna soluzione per ogni $\alpha < 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - 1 - \alpha(\cos x - 1)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ 3 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right) dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{4}\log 2$

$\boxed{\text{b}}$ $-\frac{1}{4}\log 2$

$\boxed{\text{c}}$ $+\infty$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha(e^{\sqrt{x}}-1)}\, dx$,

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ converge se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$

$\boxed{\text{c}}$ diverge per ogni $\alpha < 2$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!a^{n+1}} \frac{(2n)!a^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)a} \to 0$$

per ogni $a > 0$. Dal criterio del rapporto per successioni positive ne deduciamo che la successione converge a 0 per ogni $a > 0$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin(\beta x) = 0 = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Mentre, ricordando che per $x \to 0$, $\log(1+x) = x + o(x)$ e $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0^+$ otteniamo

$$x\log(1+x) + e^{x^2} - \alpha = x^2 + o(x^2) + 1 + x^2 + o(x^2) - \alpha = 1 - \alpha + 2x^2 + o(x^2)$$

ed essendo $\sqrt{1+2x} - 1 = x + o(x)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\log(1+x) + e^{x^2} - \alpha}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\alpha+2x^2+o(x^2)}{x+o(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

ed $f(x)$ risulterà continua in 0 solo per $\alpha = 1$.
Riguardo alla derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta\cos(\beta x)$ e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Riguardo alla derivata destra, osservato che la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\alpha = 1$, ci limiteremo a considerare solo questo caso. Da quanto ottenuto sopra abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\log(1+x)+e^{x^2}-1}{x(\sqrt{1+2x}-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = 2$$

e quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = 2$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Determiniamo il numero di zeri della funzione $f_\alpha(x) = e^{\alpha x^2} - x^2$. Osserviamo innanzitutto che la funzione risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}$. Poichè la funzione risulta pari, potremo limitare lo studio all'intervallo $[0, +\infty)$. Risulta $f_\alpha(0) = 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e, dalla gerarchia degli infiniti, essendo $\alpha > 0$ risulta

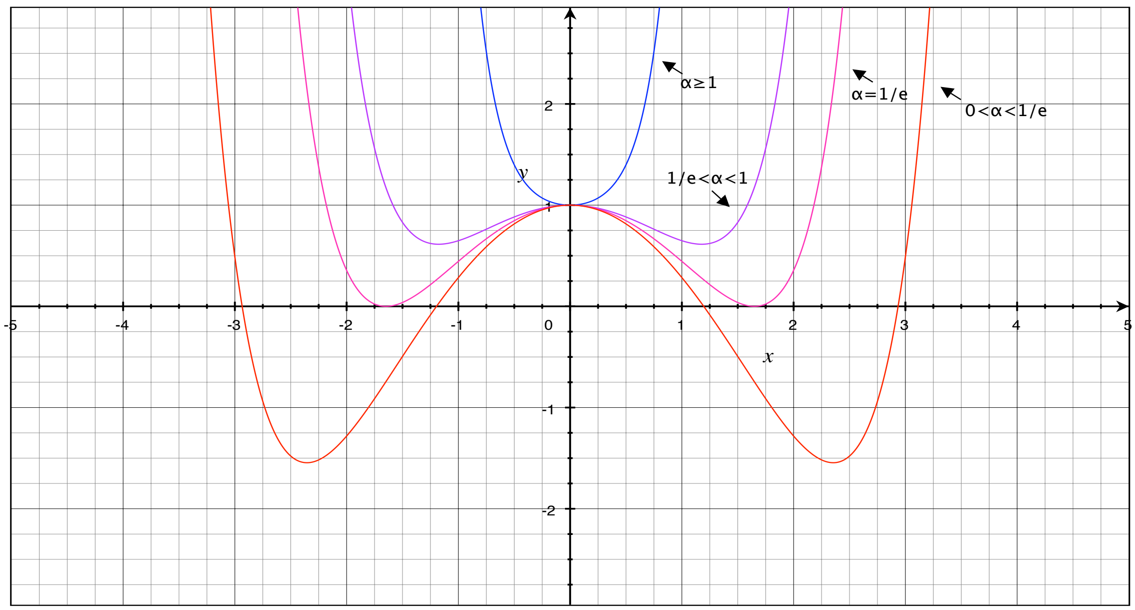
$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$$

La funzione risulta inoltre derivabile in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha > 0$ con

$$f'_\alpha(x) = 2\alpha x e^{\alpha x^2} - 2x = 2x(\alpha e^{\alpha x^2} - 1)$$

Per $x \in (0, +\infty)$, risulta che $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $\alpha e^{\alpha x^2} > 1$ e dunque, essendo $\alpha > 0$, se e solo se $e^{\alpha x^2} > \frac{1}{\alpha}$ ovvero $x^2 > \frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{\alpha}$.
Quindi, se $\alpha \geq 1$, avremo che risulta $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$ e dunque che $f_\alpha(x)$ è

strettamente crescente in $[0, +\infty)$.
Se invece $0 < \alpha < 1$, avremo che $f'_\alpha(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ se e solo se $x > \sqrt{\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\alpha}} = x_\alpha$ e quindi che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $[x_\alpha, +\infty)$, strettamente decrescente in $[0, x_\alpha]$ e che x_α è punto di minimo con $f_\alpha(x_\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\alpha}$. Risulta inoltre $f_\alpha(x_\alpha) > 0$ per $\alpha > \frac{1}{e}$, $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ per $\alpha = \frac{1}{e}$ e $f_\alpha(x_\alpha) < 0$ per $0 < \alpha < \frac{1}{e}$



Riunendo quanto ottenuto, dal Teorema di esistenza degli zeri e dallo studio della monotonia, deduciamo che $f_\alpha(x)$ ammette due zeri per $\alpha = \frac{1}{e}$, quattro zeri per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ e nessun zero per $\frac{1}{e} < \alpha$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$ per $y \to 0$, posto $y = \cos x - 1$, per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \sqrt{\cos x} - 1 - \alpha(\cos x - 1) \\ &= \frac{\cos x - 1}{2} - \frac{(\cos x - 1)^2}{8} + o((\cos x - 1)^2) - \alpha(\cos x - 1) \\ &= (\frac{1}{2} - \alpha)(\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{8} + o((\cos x - 1)^2) \end{aligned}$$

Infine, essendo $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, si ottiene

$$f_\alpha(x) = (\alpha - \frac{1}{2})(\frac{x^2}{2} + o(x^2)) - \frac{x^4}{32} + o(x^4)$$

Quindi, se $\alpha \neq \frac{1}{2}$ allora $ord(f_\alpha(x)) = 2$ mentre se $\alpha = \frac{1}{2}$ risulta $ord(f_\alpha(x)) = 4$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)dx &= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+\int \frac{1}{x}\frac{4}{(x+2)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}dx\\
&= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+\int \frac{2}{x(x^2+4)}dx\\
&= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}dx\\
&= -\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+\frac{1}{2}(\log|x|-\log\sqrt{x^2+4})+c
\end{aligned}$$

Quindi, dalla formula fondamentale del calcolo integrale otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)dx\\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+\frac{1}{2}(\log x-\log\sqrt{x^2+4})\right]_2^b\\
&= \lim_{b\to+\infty}-\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{b-2}{b+2}\right)+\frac{1}{2}\log\frac{b}{\sqrt{b^2+4}}+\frac{1}{4}\log 2=\frac{1}{4}\log 2
\end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Osservato che l'integranda $f_\alpha(x)=\dfrac{\log(1+x)}{x^\alpha(e^{\sqrt{x}}-1)}$ risulta continua in $(0,+\infty)$, avremo che l'integrale improprio dato risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$. Studiamo separatamente il comportamento dei due integrali al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Per $x\to+\infty$, osserviamo che dalla gerarchia degli infiniti risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)}{x^{\alpha-p}(e^{\sqrt{x}}-1)}=0$$

per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ ed ogni $p>1$ e dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.

Per $x\to0^+$, osservato che $\log(1+x)\sim x$ e che $e^{\sqrt{x}}-1\sim\sqrt{x}$, otteniamo

$$f_\alpha(x)\sim\frac{x}{x^\alpha\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

e dal criterio del confronto asintotico l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge se e solo se $\alpha<\frac{3}{2}$.
Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha<\frac{3}{2}$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 19/03/2008

1) La successione $a_n = \dfrac{n^n \log n}{(n!)^\alpha}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0 per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{b}}$ converge a 1 per ogni $0 < \alpha < 1$
$\boxed{\text{c}}$ diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha(1-\cos x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}} & \text{se } x \in (0,\pi] \\ \sin(\beta x) & \text{se } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ è derivabile solo per $\alpha > \frac{3}{2}$ e $\beta = 0$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$ e $\beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f_\alpha(x) = (1-x)\log(1-x) + \alpha x$

$\boxed{\text{a}}$ è positiva nel suo dominio per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ ammette due zeri per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ ammette asintoto verticale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = e^{\sin^2 x} - \sqrt{\cos(\alpha x)}$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ 3 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per $|\alpha| = 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{2}(\pi + \log 2)$
$\boxed{\text{b}}$ $\pi - \log 2$
$\boxed{\text{c}}$ $+\infty$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(e^{\alpha x} + x)^2}\,dx$,

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ converge se e solo se $\alpha \neq 0$
$\boxed{\text{c}}$ diverge per ogni $\alpha < 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\log(n+1)}{((n+1)!)^\alpha}\frac{(n!)^\alpha}{n^n \log n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\log(n+1)}{\log n}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ e & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

essendo $\frac{\log(n+1)}{\log n} \to 1$ e $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. Dal criterio del rapporto ne deduciamo che la successione converge a 0 per ogni $\alpha > 1$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin(\beta x) = 0 = f(0)$ per ogni $\beta \in I\!R$. Per $x \to 0^+$ osserviamo innanzitutto che essendo $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ si ha $x^\alpha(1-\cos x) \sim \frac{x^{\alpha+2}}{2}$ mentre, essendo $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e $\frac{\sin x}{x} \to 1$, si ha

$$\sqrt{x} - \sqrt{\sin x} = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{6(1+\sqrt{\frac{\sin x}{x}})} \sim \frac{x^{\frac{5}{2}}}{12}$$

In alternativa, ricordando che $\sqrt{1+y}-1 \sim \frac{y}{2}$ per $y \to 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - \sqrt{\sin x} &= \sqrt{x}(1-\sqrt{\tfrac{\sin x}{x}}) = \sqrt{x}(1-\sqrt{1+(\tfrac{\sin x}{x}-1)}) \sim -\frac{1}{2}\sqrt{x}(\frac{\sin x}{x}-1) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\sin x - x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2}\frac{\frac{x^3}{6}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{12}\end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(1-\cos x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} 6x^{\alpha-\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ 6 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ed $f(x)$ risulterà continua in 0 solo per $\alpha > \frac{1}{2}$ e ogni $\beta \in I\!R$.
Riguardo alla derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta\cos(\beta x)$ e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$. Quindi, per ogni $\beta \in I\!R$, la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Riguardo alla derivata destra, osservato che la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\alpha > \frac{1}{2}$, ci limiteremo a considerare solo questo caso. Da quanto ottenuto sopra abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x^{\alpha-\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} 6x^{\alpha-\frac{3}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{3}{2} \\ 6 & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}$$

e quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = 0$ se $\alpha > \frac{3}{2}$ e $f'_+(0) = 6$ se $\alpha = \frac{3}{2}$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x = 0$ per $\alpha > \frac{3}{2}$ e $\beta = 0$ e per $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = 6$.

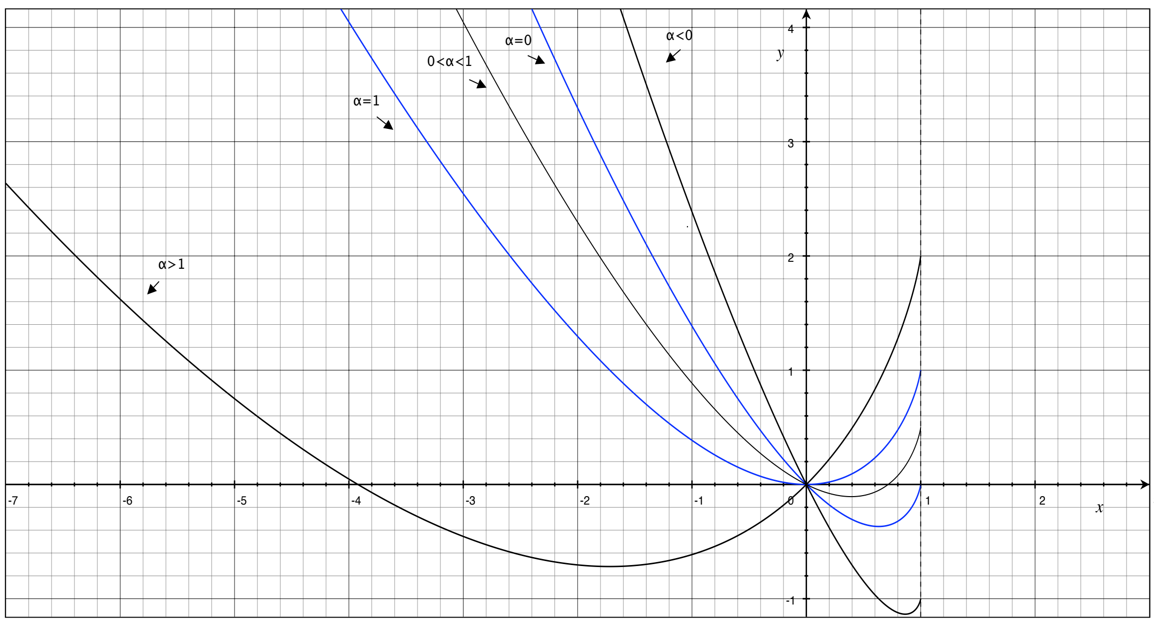
(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in tutto $(-\infty, 1)$ e

$$\lim_{x\to -\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to -\infty} x(\frac{1-x}{x}\log(1-x)+\alpha) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = \alpha$$

La funzione risulta inoltre derivabile in $(-\infty, 1)$ con

$$f'_\alpha(x) = -\log(1-x) - 1 + \alpha$$

Risulta che $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $\log(1-x) < 1-\alpha$ e dunque se e solo se $x > 1 - e^{\alpha-1} = x_\alpha$. Quindi, $f_\alpha(x)$ risulta strettamente crescente in $[x_\alpha, 1)$, strettamente decrescente in $(-\infty, x_\alpha]$ e x_α risulta punto di minimo assoluto con $x_\alpha < 0$ se $\alpha > 1$, $x_\alpha = 0$ se $\alpha = 1$ e $x_\alpha > 0$ se $\alpha < 1$. Inoltre, essendo $f_\alpha(x_\alpha) = \alpha - e^{\alpha-1}$ e e^x funzione strettamente convessa (da cui $e^x > x+1$ per ogni $x \neq 0$) si ha che $f_\alpha(x_\alpha) < 0$ per ogni $\alpha \neq 1$ mentre $f(x_\alpha) = 0$ se $\alpha = 1$.



Riunendo quanto ottenuto, essendo $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = \alpha$, dal Teorema di esistenza degli zeri e dallo studio della monotonia, deduciamo che $f_\alpha(x)$ ammette due zeri per ogni $\alpha > 0$ con $\alpha \neq 1$ mentre ammette un unico zero per $\alpha \leq 0$ e $\alpha = 1$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$ e che $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$, posto $y = \sin^2 x$, per $x \to 0$ otteniamo

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + o(\sin^2 x) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

mentre, essendo $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ e $\cos y - 1 = -\frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, ponendo $y = \alpha x$, per $x \to 0$, si ottiene

$$\sqrt{\cos(\alpha x)} = \sqrt{1 + (\cos(\alpha x) - 1)} = 1 + \frac{1}{2}(\cos(\alpha x) - 1) + o(\cos(\alpha x) - 1) = 1 - \frac{\alpha^2}{4}x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$f_\alpha(x) = e^{\sin^2 x} - \sqrt{\cos(\alpha x)} = (1 + \frac{\alpha^2}{4})x^2 + o(x^2)$$

ed essendo $1 + \frac{\alpha^2}{4} > 0$ per ogni $\alpha \in I\!R$ ne deduciamo che $ord(f_\alpha(x)) = 2$ per ogni $\alpha \in I\!R$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti,

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x}dx = \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= \log|x| + 2\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

Quindi, dalla definizione di integrale improprio e dalla formula fondamentale del calcolo integrale otteniamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3+x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{2x+1}{x^3+x}dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\log|x| + 2\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\log\frac{b^2}{1+b^2} + 2\arctan b - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - 2\arctan 1 = \frac{1}{2}(\pi + \log 2)$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{(e^{\alpha x}+x)^2}$ risulta continua in $[1,+\infty)$, e non avendo segno costante studiamo la convergenza assoluta dell'integrale. Essendo

$$|f_\alpha(x)| = |\frac{\sin x}{(e^{\alpha x}+x)^2}| \le \frac{1}{(e^{\alpha x}+x)^2} \quad \forall x \ge 1$$

avremo che, posto $g_\alpha(x) = \frac{1}{(e^{\alpha x}+x)^2}$, l'integrale improprio dato risulterà convergente se risulta tale l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\alpha(x)dx$.
Se $\alpha > 0$, per $x \to +\infty$ osserviamo che dalla gerarchia degli infiniti risulta $x^\beta = o(e^{\alpha x})$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_\alpha(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{(e^{\alpha x}+x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^{2\alpha x}(1+\frac{x}{e^{\alpha x}})^2} = 0$$

per ogni $p > 1$. Dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha > 0$.

Se $\alpha \le 0$, per $x \to +\infty$, osservato che $e^{\alpha x} \to 0$ se $\alpha < 0$ e $e^{\alpha x} = 1$ se $\alpha = 0$, otteniamo

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{x^2(\frac{e^{\alpha x}}{x}+1)^2} \sim \frac{1}{x^2}$$

e dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha \le 0$.

Ne segue che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\alpha(x)dx$ converge e dunque che l'integrale dato converge assolutamente.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 10/04/2008

1) La successione $a_n = n^2(e^{\frac{1}{n^2}} - (\cos\frac{1}{n})^\alpha)$ per $n \to +\infty$ è infinitesima

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \neq -2$

$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha = -2$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{\log(1+x^2)}}{\log(1+x^\alpha)} & \text{se } x > 0 \\ e^{\beta x^2} - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ è derivabile solo per $\alpha > 3$ e $\beta = 0$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per ogni $0 < \alpha < 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \sqrt{x^2-1} + x$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti

$\boxed{\text{b}}$ è iniettiva

$\boxed{\text{c}}$ ammette un unico zero

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) Tra le aree di tutti i rettangoli inscritti in un ellisse di semiassi a e b quella massima è

$\boxed{\text{a}}$ πab

$\boxed{\text{b}}$ $4ab$

$\boxed{\text{c}}$ $2ab$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\int_0^1 x\log(1+\sqrt{x})\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{\log 2}{2} - \frac{7}{24}$

$\boxed{\text{b}}$ $\frac{7}{24}$

$\boxed{\text{c}}$ $-\frac{7}{24}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x^\alpha} - e^{\sqrt{x}}}\,dx$,

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{c}}$ diverge per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che per ogni successione $x_n \to 0$ $\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n)$ e $(1+x_n)^\alpha = 1 + \alpha x_n + o(x_n)$, per $n \to +\infty$ risulta

$$(\cos \frac{1}{n})^\alpha = (1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

mentre, essendo $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$, si ha $e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Quindi

$$e^{\frac{1}{n^2}} - (\cos \frac{1}{n})^\alpha = (1 + \frac{\alpha}{2})\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

e

$$a_n = n^2(e^{\frac{1}{n^2}} - (\cos \frac{1}{n})^\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{2} + o(1)$$

La successione risulta allora infinitesima se e solo se $\alpha = -2$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti si ha $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\beta x^2} - 1 = 0 = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $x \to 0^+$, osserviamo innanzitutto che essendo $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ si ha

$$x - \sqrt{\log(1+x^2)} = \frac{x^2 - \log(1+x^2)}{x + \sqrt{\log(1+x^2)}} \sim \frac{\frac{x^4}{2}}{x + \sqrt{\log(1+x^2)}} = \frac{x^3}{2(1 + \sqrt{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}})} \sim \frac{x^3}{4}$$

Allora, per $\alpha > 0$ risulta $\log(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3-\alpha}}{4} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 3 \\ \frac{1}{4} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in 0 per ogni $\alpha < 3$.
Riguardo alla derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = 2\beta x e^{\beta x^2}$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = 0$. Riguardo alla derivata destra, da quanto ottenuto sopra, per $\alpha > 0$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^{3-\alpha}}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2-\alpha}}{4} \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ per ogni $0 < \alpha \leq 2$ con $f'_+(0) = 0$ se $0 < \alpha < 2$ e $f'_+(0) = \frac{1}{4}$ se $\alpha = 2$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x = 0$ per $0 < \alpha < 2$ e ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. La funzione risulta definita e continua in $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \geq 1\}$ e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}) = 0$$

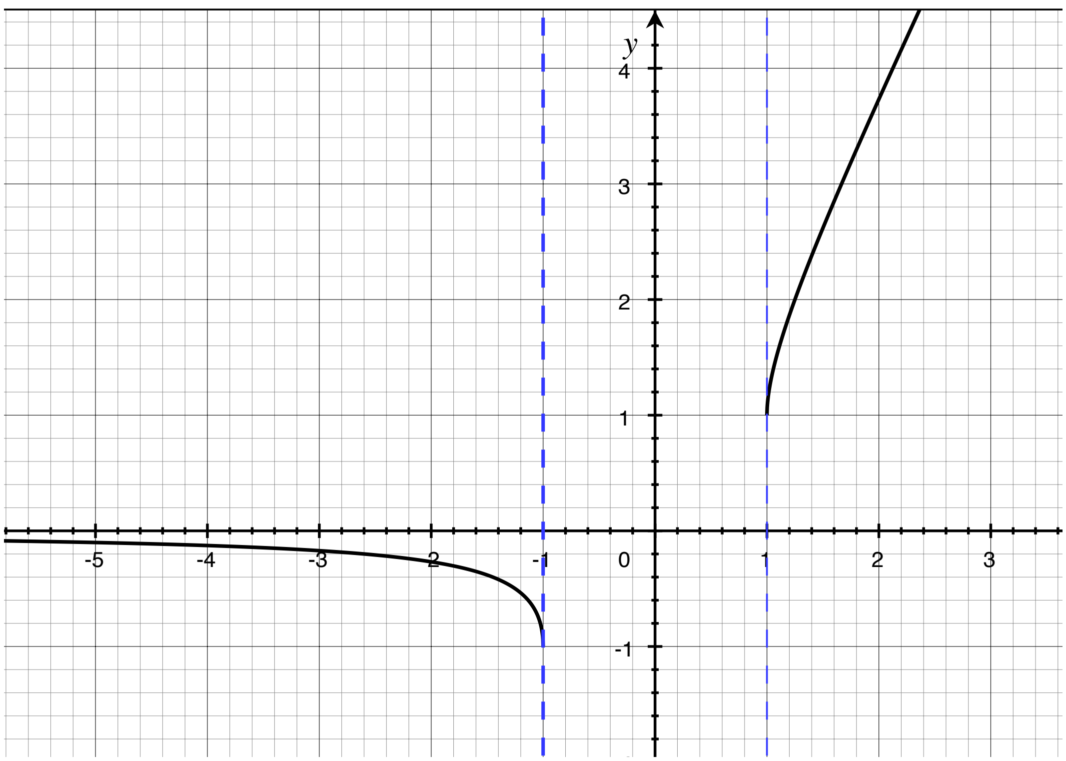
quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro per $f(x)$. Mentre $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ed essendo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1 = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x = 0,$$

$y = 2x$ risulta asintoto obliquo destro. La funzione risulta inoltre derivabile in ogni $|x| > 1$ con

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1$$

Dunque, se $x > 1$ avremo che $f'(x) > 0$ e quindi $f(x)$ strettamente crescente in $[1, +\infty)$. Se $x < -1$ avremo $f'(x) < 0$ essendo $x^2 - 1 < x^2$ e dunque $f(x)$ strettamente decrescente in $(-\infty, -1]$.



Dalla monotonia stretta di $f(x)$ negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, segue che $f(x)$ è iniettiva negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Essendo inoltre

$$\sup_{x\in(-\infty,-1]} f(x) = 0 < 1 = \min_{x\in[1,+\infty)} f(x),$$

otteniamo che $f(x)$ è iniettiva in tutto il suo dominio.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Osserviamo innanzitutto che risultano avere area massima i rettangoli $R = [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$ centrati nell'origine del piano con i vertici giacenti sull'ellisse. Ricordando che l'equazione dell'ellisse di semiassi a e b è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dovrà essere $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$ da cui deduciamo che $\beta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2}$. Quindi l'area di tali rettangoli sarà

$$A(\alpha) = 4\alpha\beta = \frac{4b}{a}\alpha\sqrt{a^2 - \alpha^2}$$

dove $\alpha \in [0, a]$. La funzione $A(\alpha)$ è continua in $[0, a]$ e derivabile in $(0, a)$ con

$$A'(\alpha) = \frac{4b}{a}\frac{a^2 - 2\alpha^2}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}$$

Ne segue che $A'(\alpha) > 0$ se e solo se $0 < \alpha < \frac{a}{\sqrt{2}}$ e quindi che $\alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ è punto di massimo assoluto per $A(\alpha)$ e l'area massima sarà

$$A(\alpha_0) = 2ab.$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, integrando per parti otteniamo

$$\int_0^1 x\log(1+\sqrt{x})dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(1+\sqrt{x})\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$$

Per calcolare l'ultimo integrale operiamo la sostituzione $t = \sqrt{x}$ (da cui $x = t^2$ e $dx = 2tdt$) e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx &= 2\int_0^1 \frac{t^4}{1+t}dt = 2\int_0^1 t^3 - t^2 + t - 1 - \frac{1}{1+t}dt = \\ &= 2\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t - \log(1+t)\right]_0^1 = \frac{14}{12} - 2\log 2\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^1 x\log(1+\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}(\frac{14}{12} - 2\log 2) = \frac{7}{24}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^\alpha} - e^{\sqrt{x}}}$ è funzione continua in $(0, 1]$ e studiamone il comportamento per $x \to 0^+$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha < 0$, per $x \to 0^+$ osserviamo che $f_\alpha(x) \to 0$ mentre se $\alpha = 0$ allora $f_\alpha(x) \to \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ e quindi, dal criterio del confronto, se $\alpha \leq 0$ l'integrale improprio converge.

Se $\alpha > 0$, per $x \to 0^+$, osservato che $e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)$ mentre $\sqrt{1 + 2x^\alpha} = 1 + x^\alpha - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$, otteniamo

$$\sqrt{1+2x^\alpha} - e^{\sqrt{x}} = x^\alpha - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) - \sqrt{x} - \frac{x}{2} + o(x) \sim \begin{cases} x^\alpha & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ -x & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ -\sqrt{x} & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

e dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che, per $\alpha > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha \neq \frac{1}{2}$.
Riunendo quanto ottenuto si ha che l'integrale dato converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 26/06/2008

1) La successione $a_n = \dfrac{n^{\alpha n}\log n}{e^{n!}}$ per $n \to +\infty$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in I\!\!R$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in I\!\!R$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha < 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{x} & \text{se } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\beta \in I\!\!R$ e $\alpha \neq 0$
$\boxed{\text{b}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!\!R$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha > 0$ e $\beta = \frac{1}{2\alpha}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = e^{\frac{\alpha x}{x-1}}$ per ogni $\alpha \neq 0$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoto orizzontale
$\boxed{\text{b}}$ è iniettiva
$\boxed{\text{c}}$ ha per immagine $(0, +\infty)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \log(\cos(\alpha x)) + \sin^2 x$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 1 per qualche $\alpha \in I\!\!R$
$\boxed{\text{b}}$ 4 per $\alpha^2 = 2$
$\boxed{\text{c}}$ 2 per ogni $\alpha \in I\!\!R$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x \sin x \; dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 0
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{2}{5}(e^{\pi} - 1)$
$\boxed{\text{c}}$ $e^{\pi} - 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + x^{\alpha})}{x + x^{2\alpha}}\, dx,$

$\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $n \to +\infty$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}\log(n+1)}{e^{(n+1)!}}\frac{e^{n!}}{n^{\alpha n}\log n} = \frac{\log(n+1)}{\log n}\frac{(n+1)^{\alpha n}(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha n}}\frac{e^{n!}}{e^{(n+1)n!}} \\ &= \frac{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}\frac{(n+1)^{\alpha}}{e^{nn!}} \sim e^{\alpha}\frac{(n+1)^{\alpha}}{e^{nn!}} \to 0\end{aligned}$$

e dal criterio del rapporto possiamo concludere che la successione converge a 0 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti si ha $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sin(\beta x) = 0 = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $x \to 0^+$, osserviamo innanzitutto che se $\alpha = 0$ allora $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ per ogni $x > 0$ e che quindi $f(x)$ non risulta continua in $x_0 = 0$. Se $\alpha \neq 0$, per $x \to 0^+$ risulta

$$\sqrt{x^2+\alpha^2} - \alpha = |\alpha|\sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}} - \alpha = \begin{cases} \alpha(\sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}}-1) \sim \frac{x^2}{2\alpha} & \text{se } \alpha > 0 \\ \alpha(-\sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}}-1) \sim -2\alpha & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > 0$.

Riguardo alla derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = \beta\cos(\beta x)$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Quindi, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Riguardo alla derivata destra, da quanto ottenuto sopra, per $\alpha > 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2\alpha}}{x^2} = \frac{1}{2\alpha}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ per ogni $\alpha > 0$ con $f'_+(0) = \frac{1}{2\alpha}$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\beta = \frac{1}{2\alpha}$ con $\alpha > 0$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. La funzione risulta definita e continua in $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 1\}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{\alpha}{1-\frac{1}{x}}} = e^{\alpha}$$

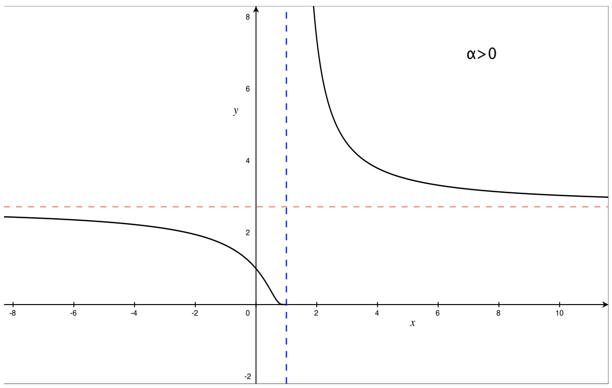
quindi $y = e^{\alpha}$ è asintoto orizzontale per $f(x)$. Mentre

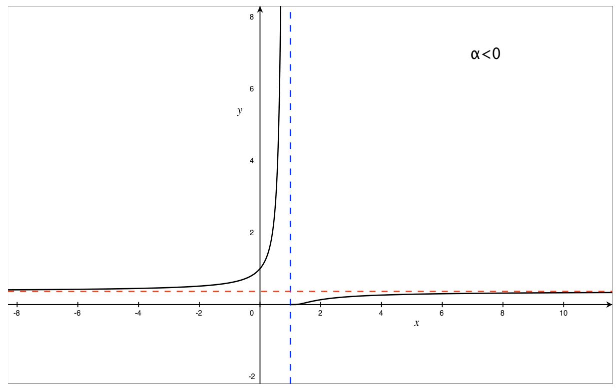
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

La funzione risulta inoltre derivabile in ogni $x \neq 1$ con

$$f'(x) = \frac{-\alpha e^{\frac{\alpha x}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

Dunque, se $\alpha > 0$ avremo $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 1$ e quindi $f(x)$ strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$ mentre se $\alpha < 0$ avremo $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$ e quindi $f(x)$ strettamente crescente in $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$





Dalla monotonia stretta di $f(x)$ negli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$, segue che $f(x)$ è iniettiva in tali intervalli. Essendo inoltre per $\alpha > 0$, $f(x_1) > e^{\alpha} > f(x_2)$ per ogni $x_1 > 1 > x_2$, otteniamo che $f(x)$ è iniettiva in tutto il suo dominio. Analogalmente per $\alpha < 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ e $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$ per $y \to 0$ posto $y = \cos(\alpha x)$ nel primo sviluppo e $y = \alpha x$ nel secondo, per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\log(\cos(\alpha x)) &= (\cos(\alpha x) - 1) - \frac{(\cos(\alpha x) - 1)^2}{2} + o((\cos(\alpha x) - 1)^2) \\ &= -\frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} - \frac{\alpha^4 x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^4 x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

Mentre essendo $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0$ si ha

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

e dunque

$$f(x) = (1 - \frac{\alpha^2}{2})x^2 - (\frac{\alpha^4}{12} + \frac{1}{3})x^4 + o(x^4)$$

ne segue che se $\alpha^2 \neq 2$ allora $ord(f(x)) = 2$ mentre se $\alpha^2 = 2$ allora $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ e $ord(f(x)) = 4$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, integrando per parti due volte otteniamo

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \cos x \, dx &= e^x \sin x \cos x - \int e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= e^x \sin x \cos x - e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 4 \int e^x \sin x \cos x \, dx\end{aligned}$$

da cui

$$\int e^x \sin x \cos x dx = \frac{1}{5} e^x (\sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x) + c, \quad c \in I\!R.$$

Ne segue che

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \cos x dx = \left[\frac{1}{5} e^x (\sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{5}(1 - e^{\pi})$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \frac{\log(1+x^{2\alpha})}{x+x^\alpha}$ è funzione continua in $(0,+\infty)$ e l'integrale risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$. Studiamone il comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Limitiamoci a considerare il caso $\alpha > 0$. Per $x \to 0^+$, osserviamo che $\log(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$. Riguardo al denominatore, osserviamo che se $2\alpha > 1$ allora $x + x^{2\alpha} \sim x$, se $2\alpha = 1$ allora $x + x^{2\alpha} = 2x$ mentre se $2\alpha < 1$ allora $x + x^{2\alpha} \sim x^{2\alpha}$. Per $x \to 0^+$ abbiamo allora che

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{x^\alpha}{x} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

e dal criterio del confronto asintotico deduciamo che $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha > 0$.
Per $x \to +\infty$, risulta $\log(1+x^\alpha) \sim \alpha \log x$ mentre se $2\alpha < 1$ allora $x + x^{2\alpha} \sim x$, se $2\alpha = 1$ allora $x + x^{2\alpha} = 2x$ e se $2\alpha > 1$ allora $x + x^{2\alpha} \sim x^{2\alpha}$. Riunendo quanto osservato per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{\alpha \log x}{x^{2\alpha}} & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{\log x}{4x} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha \log x}{x} & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

e dal criterio del confronto asintotico, ricordando che $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\beta} dx$ converge se e solo se $\beta > 1$, deduciamo che $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Riunendo quanto ottenuto si ha che $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge solo per $\alpha > \frac{1}{2}$.

Analisi Matematica 1

seconda prova scritta del 14/07/2008

1) La successione $a_n = \dfrac{e^{(\frac{n}{n-1})^\alpha} - e}{\log(\frac{n}{n-1})}$ per $n \to +\infty$ converge a 1

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha = 1/e$

$\boxed{\text{c}}$ per $\alpha = 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ \alpha e^x - 1 + \beta \sin x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è derivabile per $\alpha = 1$ e ogni $\beta \in I\!R$

$\boxed{\text{b}}$ è derivabile per ogni $\alpha \in I\!R$ e $\beta = 1$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = -\beta = 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = x^4 e^x$

$\boxed{\text{a}}$ ammette massimo in $I\!R$

$\boxed{\text{b}}$ è iniettiva su $I\!R$

$\boxed{\text{c}}$ è convessa su $I\!R$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f_\alpha(x) = \sin^2 x + \cos(\alpha x^2) - e^{x^2}$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \neq 0$

$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 4 per almeno un $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{c}}$ 4 per ogni $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\log(\sin x)\frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3$

$\boxed{\text{b}}$ $-\frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3$

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{2}\log 3$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sin^\alpha(\pi x)}\, dx$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha < 1$

$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha < 2$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per $n \to +\infty$, osserviamo che dai limiti notevoli $e^{x_n} - 1 \sim x_n$ e $(1+x_n)^\alpha - 1 \sim \alpha x_n$ per ogni $x_n \to 0$, risulta

$$e^{(\frac{n}{n-1})^\alpha} - e = e\left(e^{(\frac{n}{n-1})^\alpha - 1} - 1\right) \sim e((\frac{n}{n-1})^\alpha - 1) = e((1+\frac{1}{n-1})^\alpha - 1) \sim \frac{e\,\alpha}{n-1}$$

e dunque, essendo $\log(1+x_n) \sim x_n$ per ogni $x_n \to 0$, otteniamo

$$a_n = \frac{e^{(\frac{n}{n-1})^\alpha} - e}{\log(\frac{n}{n-1})} = \frac{\frac{e\,\alpha}{n-1}}{\log(1+\frac{1}{n-1})} \to e\,\alpha$$

Ne segue che la successione converge ad 1 solo se $\alpha = \frac{1}{e}$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \alpha e^x - 1 + \beta \sin(x) = \alpha - 1 = f(0)$$

per ogni $\beta \in I\!R$. Mentre, dalla gerarchia degli infiniti abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0.$$

Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$.
Riguardo alla derivabilità, per $\alpha = 1$, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = e^x + \beta\cos x$ e che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 1 + \beta$ per ogni $\beta \in I\!R$. Quindi, per ogni $\beta \in I\!R$, la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 1 + \beta$. Riguardo alla derivata destra, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^3}{e^y} = 0$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\beta + 1 = 0$ e $\alpha = 1$.

(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $I\!R$ e dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

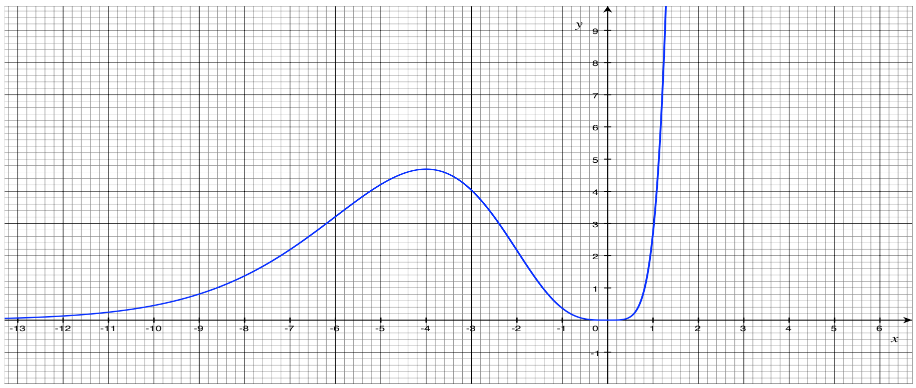
quindi la funzione non ammette massimo in $I\!R$ La funzione risulta inoltre derivabile in ogni $x \in I\!R$ con

$$f'(x) = x^3 e^x (4 + x)$$

Dunque, avremo $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (-4, 0)$ e quindi $f(x)$ strettamente decrescente in $(-4, 0)$ mentre avremo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ e quindi $f(x)$ strettamente crescente in $(-\infty, -4)$ e $(0, +\infty)$. Inoltre $x = -4$ è punto di massimo relativo mentre $x = 0$ è punto di minimo assoluto. Dal Teorema dei valori intermedi abbiamo che la funzione non è iniettiva. La funzione risulta derivabile due volte in ogni $x \in I\!R$ con

$$f''(x) = x^2 e^x (3(4 + x) + x(5 + x)) = x^2 e^x (12 + 8x + x^2)$$

e poichè $f''(x)$ cambia segno in $I\!R$ ne deduciamo che $f(x)$ non è convessa.



(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$ e $\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$ per $y \to 0$ posto $y = x^2$ nel primo sviluppo e $y = \alpha^2 x$ nel secondo, per $x \to 0$ otteniamo

$$\cos(\alpha x^2) - e^{x^2} = -x^2 - \frac{\alpha^2+1}{2}x^4 + o(x^4)$$

Mentre essendo $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$ si ha

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

e dunque

$$f_\alpha(x) = \sin^2 x + \cos(\alpha x^2) - e^{x^2} = -\frac{3\alpha^2+5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Essendo $3\alpha^2 + 5 > 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ne segue che $ord(f_\alpha(x)) = 4$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osservato che $2\frac{\sin x}{\cos^3 x} = D(\frac{1}{\cos^2 x})$ integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int 2\log(\sin x)\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx &= \frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} - \int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} - \log|\tan x| + c\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2\log(\sin x)\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \left[\frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} - \log|\tan x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{2}\log 3$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \frac{x}{\sin^\alpha(\pi x)}$ è funzione continua in $(0,1)$ e l'integrale risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^{\frac{1}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ e $\int_{\frac{1}{2}}^1 f_\alpha(x)\,dx$. Studiamone il comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \to 0^+$, osserviamo che $\sin^\alpha(\pi x) \sim \pi^\alpha x^\alpha$ e quindi

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{\pi^\alpha x^{\alpha-1}}$$

e dal criterio del confronto asintotico deduciamo che $\int_0^{\frac{1}{2}} f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha < 2$.
Per $x \to 1^-$, osserviamo che dall'identità degli angoli supplementari risulta

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi - \pi x) = \sin(\pi(1-x))$$

ed essendo $\pi(1-x) \to 0$ per $x \to 1$ si ottiene $\sin^\alpha(\pi x) \sim \pi^\alpha(1-x)^\alpha$. Quindi

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{\pi^\alpha(1-x)^\alpha)}$$

e dal criterio del confronto asintotico deduciamo che $\int_{\frac{1}{2}}^1 f_\alpha(x)dx$ converge solo se $\alpha < 1$.

Riunendo quanto ottenuto si ha che $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha < 1$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 12/09/2008

1) La successione $a_n = \dfrac{n^n}{n + e^{n^2}}$ per $n \to +\infty$

- $\boxed{\text{a}}$ converge a 1
- $\boxed{\text{b}}$ diverge
- $\boxed{\text{c}}$ converge a 0
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La somma dei quadrati di due numeri non negativi è a. Il valore massimo del loro prodotto è

- $\boxed{\text{a}}$ a^2
- $\boxed{\text{b}}$ $\frac{a^2}{2}$
- $\boxed{\text{c}}$ $\frac{a}{2}$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $x - \arctan \dfrac{x+1}{x-1} = \alpha$ ammette

- $\boxed{\text{a}}$ un'unica soluzione per ogni $\alpha > 1$
- $\boxed{\text{b}}$ due soluzioni per ogni $|\alpha - 1| \leq \frac{\pi}{2}$
- $\boxed{\text{c}}$ due soluzioni per ogni $|\alpha| < 3$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = (x+1)^x - \cos x$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

- $\boxed{\text{a}}$ 1
- $\boxed{\text{b}}$ 2
- $\boxed{\text{c}}$ maggiore di 2
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ vale

- $\boxed{\text{a}}$ $\sqrt{2} - 2$
- $\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})$
- $\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{3}$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x) - x}{e^{x^2} - 1}\,dx$ con $\alpha > 0$ converge

- $\boxed{\text{a}}$ solo per $\alpha \neq 1$
- $\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha > 0$
- $\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha > 0$
- $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osserviamo innanzitutto che per $n \to +\infty$ risulta

$$a_n = \frac{n^n}{n + e^{n^2}} = \frac{n^n}{e^{n^2}(\frac{n}{e^{n^2}} + 1)} \sim \frac{n^n}{e^{n^2}} = b_n$$

poichè, per la gerarchia degli infiniti, $0 \leq \frac{n}{e^{n^2}} \leq \frac{n}{e^n} \to 0$. Essendo, sempre per la gerarchia degli infiniti,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{(n+1)^2}} \frac{e^{n^2}}{n^n} = \frac{n+1}{e^{2n+1}}(1 + \frac{1}{n})^n \sim \frac{n+1}{e^{2n}} \to 0 < 1, \quad \text{per } n \to +\infty,$$

dal Criterio del rapporto deduciamo che per $n \to +\infty$, $b_n \to 0$ e quindi che $a_n \to 0$.
In alternativa, osserviamo che

$$b_n = \frac{n^n}{e^{n^2}} = e^{n \log n - n^2} = e^{n^2(\frac{\log n}{n} - 1)} \sim e^{-n^2} \to 0$$

essendo $\frac{\log n}{n} \to 0$.

(2) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, siano x, y due numeri non negativi tali che $x^2 + y^2 = a$. Vogliamo determinare il valore massimo del prodotto xy. A tale scopo, osservato che $y = \sqrt{a - x^2}$, determiniamo il massimo di $p(x) = x\sqrt{a - x^2}$ al variare di $x \in [0, \sqrt{a}]$ (osserviamo infatti che la condizione $x^2 + y^2 = a$ implica che $x^2 \leq a$).
La funzione $p(x)$ risulta continua in $[0, \sqrt{a}]$ e derivabile in $(0, \sqrt{a})$ con

$$p'(x) = \frac{a - 2x^2}{\sqrt{a - x^2}}$$

avremo quindi che $p'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}$. Ne segue che $p(x)$ risulta crescente in $[0, \sqrt{\frac{a}{2}}]$, decrescente in $[\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{a}]$ e che $x_0 = \sqrt{\frac{a}{2}}$ è punto di massimo per $p(x)$ in $[0, \sqrt{a}]$ con $p(x_0) = \max p(x) = \frac{a}{2}$

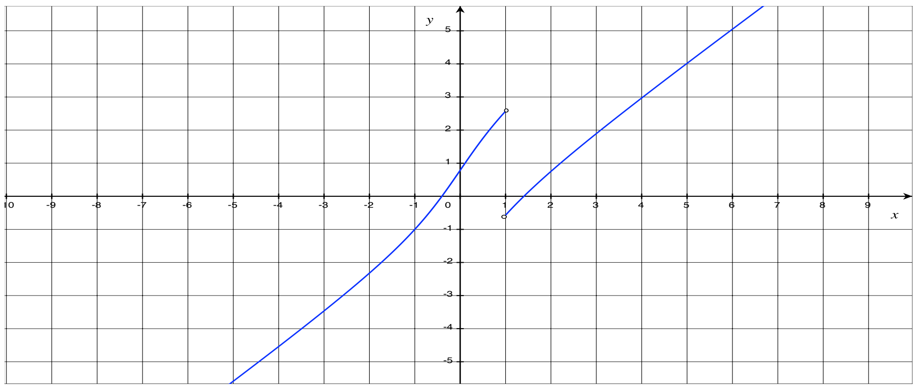
(3) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Posto $f(x) = x - \arctan \frac{x+1}{x-1}$, studiamo la funzione $f(x)$ e quindi determiniamo il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \lim_{x \to 1^\pm} f(x) = 1 \mp \frac{\pi}{2}$$

La funzione risulta inoltre derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Dunque, avremo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ e quindi che$f(x)$ strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Dal Teorema dei valori intermedi e dalla monotonia stretta abbiamo che in $(-\infty, 1)$ la funzione assume una sola volta tutti i valori $\alpha \in (-\infty, 1 + \frac{\pi}{2})$ e che in $(1, +\infty)$ la funzione assume una sola volta tutti i valori $\alpha \in (1 - \frac{\pi}{2}, +\infty)$:



Ne segue che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette una sola soluzione per ogni $\alpha \leq 1 - \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \geq 1 + \frac{\pi}{2}$ mentre ammette due soluzioni per ogni $1 - \frac{\pi}{2} < \alpha < 1 + \frac{\pi}{2}$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$ e che $\log x = x + o(x)$ mentre $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ posto $y = x\log(x+1)$ nel primo sviluppo, per $x \to 0$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
f(x) = e^{x\log(x+1)} - \cos x &= x\log(x+1) + o(x\log(x+1)) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= x(x + o(x)) + o(x(x+o(x))) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}
$$

Ne segue che $ord(f(x)) = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = D(\sqrt{1+x^2})$ integrando per parti otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \left[x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(2-\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

In alternativa l'integrale si poteva calcolare utilizzando la regola di sostituzione ponendo $t^2 = x^2+1$ (da cui $x = \sqrt{t^2-1}$ e $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$) oppure $t = x^2$ (da cui $x = \sqrt{t}$ e $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$), ottenendo nel primo caso

$$
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{t}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(2-\sqrt{2})
$$

e nel secondo

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+t}}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[2(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}(2-\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \frac{\log(1+\alpha x)-x}{e^{x^2}-1}$ è funzione continua in $(0,1]$, studiamone il comportamento per $x \to 0^+$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Per $x \to 0^+$, osserviamo che $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$ mentre $\log(1 + \alpha x) = \alpha x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)$ e dunque

$$f_\alpha(x) = \frac{(\alpha-1)x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \sim \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x} & \text{se } \alpha \neq 1 \ , \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Essendo $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergente, dal criterio del confronto asintotico, deduciamo che per $\alpha \neq 1$ l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ diverge mentre se $\alpha = 1$, essendo $f_\alpha(x)$ limitata in $(0,1]$ avremo che $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge .