Analisi Matematica 1

seconda prova scritta del 21/12/2006

1) La successione $a_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ per $n \to +\infty$ converge ad 1

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha = -2$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = e^{x^2} - \sin^2 x - 1$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2

$\boxed{\text{b}}$ 4

$\boxed{\text{c}}$ 6

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}+\cos x-\beta}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^{\alpha x} - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\beta > 0$ e $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ non è derivabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per $\beta = 2$ e ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'equazione $|x|^\alpha e^x = 1$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ 3 soluzioni per ogni $\alpha > e$

$\boxed{\text{b}}$ nessuna soluzione per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{c}}$ 2 soluzioni per ogni $\alpha > 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\log 3 + \log 2 - \pi$

$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{2}\log 3 - \log 4 - \frac{\pi}{3}$

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{3}{2}\log 3 - \log 2 - \frac{\pi}{6}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x^2\log(1+x^\alpha)}\,dx$,

$\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha > 4$

$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha < 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Osservato che $a_n = e^{n^\alpha \log(\cos\frac{1}{n})}$, studiamo il comportamento della successione $b_n = n^\alpha \log(\cos\frac{1}{n})$ al variare di $\alpha \in I\!R$. Ricordando che $\log(1+x_n) \sim x_n$ per $x_n \to 0$, posto $x_n = \cos\frac{1}{n} - 1$, otteniamo per $n \to +\infty$,

$$b_n = n^\alpha \log(1 + (\cos\frac{1}{n} - 1)) \sim n^\alpha(\cos\frac{1}{n} - 1)$$

Essendo inoltre $1 - \cos x_n \sim \frac{x_n^2}{2}$ per $x_n \to 0$, ponendo $x_n = \frac{1}{n}$ si ottiene

$$b_n \sim n^\alpha(-\frac{1}{2n^2}) = -\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$$

Avremo allora $b_n \to 0$ se e solo se $\alpha < 2$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, per $x \to 0$ otteniamo

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

D'altra parte essendo $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$, si ha

$$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Quindi risulta $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) = \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$ e dunque $ord(f(x)) = 4$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\alpha x} - 1 = 0 = f(0)$$

per ogni $\alpha \in I\!R$. Mentre, ricordando che per $x \to 0$, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos x - \beta}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2 - \beta + o(x^2)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta = 2 \\ +\infty & \text{se } \beta < 2 \\ -\infty & \text{se } \beta > 2 \end{cases}$$

e la funzione risulterà continua in 0 se e solo se $\beta = 2$.
Riguardo alla derivabilità, si ha

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha$$

Quindi, per ogni $\alpha \in I\!R$, la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = \alpha$. Mentre, osservato che la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\beta = 2$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

e la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x = 0$ solo per $\beta = 2$ e $\alpha = 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Osservato che l'equazione data è equivalente a $f(x) = 0$ essendo $f(x) = |x|^\alpha e^x - 1$, sarà sufficiente determinare il numeri di zeri della funzione $f(x)$ al variare di $\alpha > 0$. La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Riguardo alla monotonia, osserviamo che la funzione è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}e^x + x^\alpha e^x = x^{\alpha-1}e^x(\alpha + x) & \text{se } x > 0 \\ -\alpha(-x)^{\alpha-1}e^x + (-x)^\alpha e^x = -(-x)^{\alpha-1}e^x(\alpha + x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se $x > 0$, essendo $\alpha > 0$, avremo $x > -\alpha$ e dunque $f'(x) > 0$. Se $x < 0$, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -\alpha$. Ne segue che:

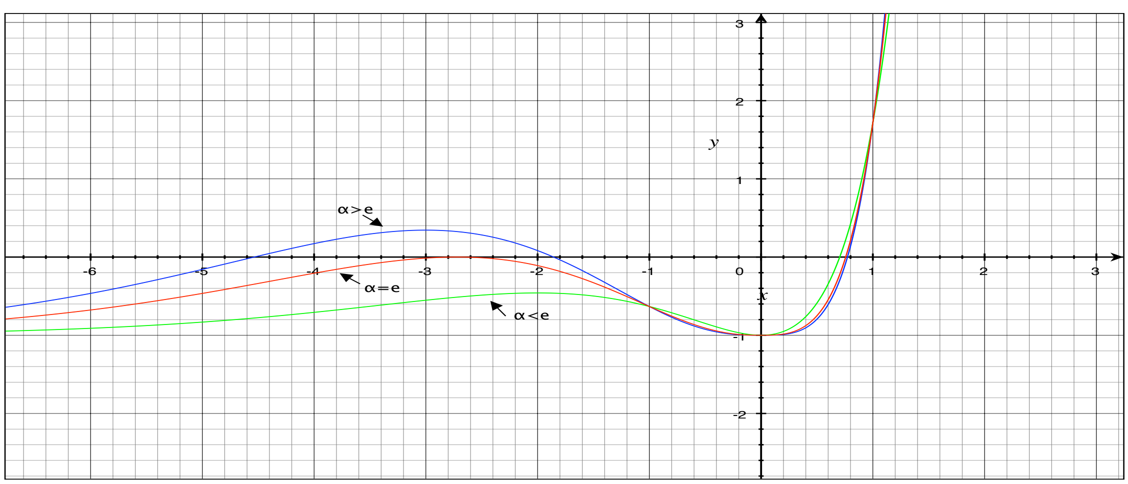
i) $f(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, -\alpha)$ e in $(0, +\infty)$;

ii) $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\alpha, 0)$;

iii) $-\alpha$ è massimo relativo per $f(x)$ con $f(-\alpha) = \alpha^\alpha e^{-\alpha} - 1 = (\frac{\alpha}{e})^\alpha - 1$;

iv) 0 è minimo assoluto per $f(x)$ con $f(0) = -1$.

Poichè $(\frac{\alpha}{e})^\alpha > 1$ se e solo se $\frac{\alpha}{e} > 1$ e dunque $\alpha > e$, avremo $f(-\alpha) > 0$ se e solo se $\alpha > e$.



Dal Teorema di esistenza degli zeri e da $(i) - (iv)$ deduciamo che se $\alpha > e$, la funzione ammette uno ed un solo zero negli intervalli $(-\infty, -\alpha)$, $(-\alpha, 0)$ e $(0, +\infty)$ e dunque $\boxed{\text{a}}$ è vera.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, si determinano $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(A + B)x^2 + (2A + B + C)x + 2A + C}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}.$$

Le costanti A e B saranno date da

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=0 \\ 2A+C=2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=-4 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx &= 3\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx \\
&= 3\log|x+1| - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \\
&= 3\log|x+1| - \log(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + c
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx = \frac{3}{2}\log 3 - \log 2 - \frac{\pi}{6}.$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. L'integranda $f_\alpha(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x^2\log(1+x^\alpha)}$ risulta continua e positiva in $(0,1]$. Ricordando che $\sqrt{1+y}-1 \sim \frac{y}{2}$ e $\sin y \sim y$ per $y \to 0$, per $x \to 0$ si ha $\sqrt{1+\sin^2 x}-1 \sim \frac{1}{2}\sin^2 x \sim \frac{x^2}{2}$ e quindi

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2\log(1+x^\alpha)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ne segue che per $\alpha \leq 0$ si ha $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e dunque $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ converge. Se $\alpha > 0$, si ha $x^\alpha \to 0$ per $x \to 0$ ed essendo $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$, otteniamo

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha}$$

Dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12/01/2007

1) La successione $a_n = \dfrac{n! \sin^\alpha \frac{1}{n}}{2^{n^2}}$ per $n \to +\infty$ converge ad 0

$\boxed{a}$ per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{b}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{c}$ solo per $\alpha > 0$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+\alpha x}-1} & \text{se } x > 0 \\ \beta & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, $\alpha \neq 0$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{a}$ è continua per ogni $\beta \in I\!R$ e $\alpha = 2$
$\boxed{b}$ non è derivabile per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{c}$ è derivabile per $\beta = \frac{1}{4}$ e $\alpha = 4$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\log |x| = \alpha x$ ammette

$\boxed{a}$ 3 soluzioni per ogni $\alpha < \frac{1}{e}$, $\alpha \neq 0$
$\boxed{b}$ nessuna soluzione per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{c}$ 2 soluzioni per ogni $\alpha > -1$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

4) Le dimensioni della scatola a base quadrata di volume pari a $8m^3$ avente superficie esterna minima sono

$\boxed{a}$ $2 \times 2 \times 2$
$\boxed{b}$ $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 1$
$\boxed{c}$ $1 \times 1 \times 8$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log^2(2x+1)}{(2x+1)^3}\, dx$ vale

$\boxed{a}$ $\frac{1}{32} - \frac{1}{36}(\log^2 3 + \log 3 + \frac{1}{2})$
$\boxed{b}$ $\frac{1}{9}(\log^2 3 + \log 3 + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}$
$\boxed{c}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\log^2 3 + \log 3 + 1)$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{e^{x^\alpha} - \cos x}\, dx$,

$\boxed{a}$ diverge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{b}$ converge per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{c}$ converge per ogni $\alpha < 2$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, essendo $\sin x_n \sim x_n$ per ogni $x_n \to 0$, per $n \to +\infty$ e per ogni $\alpha \in I\!R$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\sin^\alpha \frac{1}{n+1}}{\sin^\alpha \frac{1}{n}} \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = \frac{n+1}{2^{2n+1}} \frac{\sin^\alpha \frac{1}{n+1}}{\sin^\alpha \frac{1}{n}} \sim \frac{n+1}{2^{2n+1}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \sim \frac{n+1}{2^{2n+1}}$$

quindi, dalla gerarchia degli infiniti, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \forall \alpha \in I\!R$$

Dal criterio del rapporto si deduce che la successione converge a 0 per ogni $\alpha \in I\!R$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \beta = f(0)$ per ogni $\beta \in I\!R$. Mentre, ricordando che per $x \to 0$, $\log(1+x) \sim x$ e $\sqrt{1+\alpha x} - 1 \sim \frac{\alpha x}{2}$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+\alpha x}-1} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{\alpha x} = \frac{2}{\alpha}$$

e la funzione risulterà continua in 0 se e solo se $\beta = \frac{2}{\alpha}$.
Riguardo alla derivabilità, è evidente che per ogni $\beta \in I\!R$ la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = 0$. Mentre, osservato che la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\beta = \frac{2}{\alpha}$ e che per $x \to 0$, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $\sqrt{1+\alpha x} = 1 + \frac{\alpha x}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{8} + o(x^2)$, otteniamo

$$\log(1+x) - \frac{2}{\alpha}(\sqrt{1+\alpha x} - 1) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{\alpha}(\frac{\alpha x}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{8}) + o(x^2) = \frac{\alpha-2}{4}x^2 + o(x^2)$$

e quindi

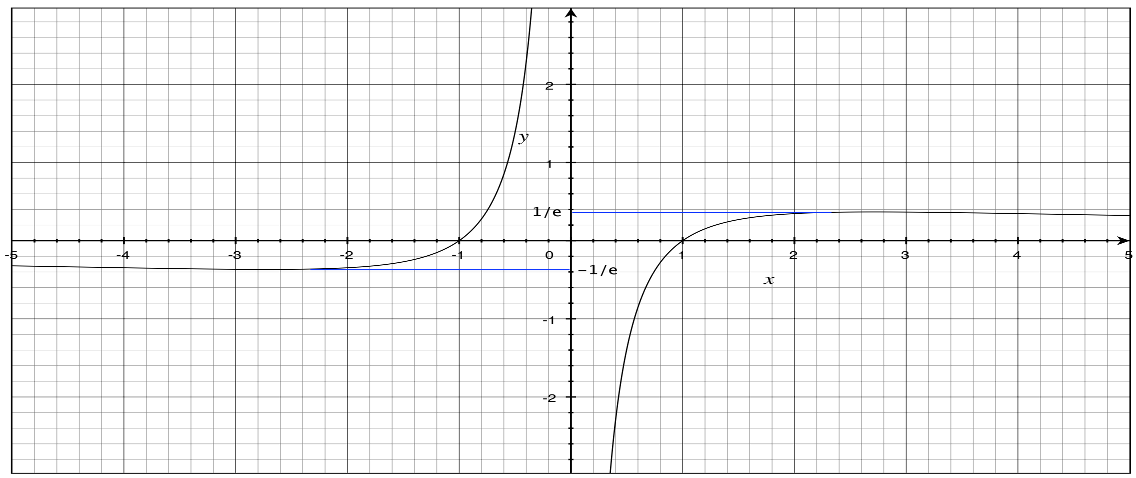
$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+\alpha x}-1} - \frac{2}{\alpha}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x) - \frac{2}{\alpha}(\sqrt{1+\alpha x}-1)}{x(\sqrt{1+\alpha x}-1)}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\alpha-2}{4}x^2}{\frac{\alpha}{2}x^2} = \frac{\alpha-2}{2\alpha}$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = \frac{\alpha-2}{2\alpha}$. Ne segue che la funzione risulterà derivabile in $x = 0$ solo se $\frac{\alpha-2}{2\alpha} = 0$ e quindi per $\alpha = 2$ da cui $\beta = 1$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Osserviamo innanzitutto che l'equazione è equivalente a $\frac{\log|x|}{x} = \alpha$.
Consideriamo quindi la funzione $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$ e studiamone l'immagine.
La funzione è definita e continua in $I\!R \setminus \{0\}$ con $\lim\limits_{x\to0^\pm} f(x) = \mp\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
La funzione risulta inoltre derivabile in $I\!R \setminus \{0\}$ con

$$f'(x) = \frac{1 - \log|x|}{x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

Allora $f'(x) > 0$ se e solo se $\log|x| < 1$ ovvero se e solo se $|x| < e$, $x \neq 0$. Quindi $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-e, 0)$ e $(0, e)$, strettamente decrescente in $(-\infty, -e)$ e $(e, +\infty)$, $x = e$ è punto di massimo relativo con $f(e) = \frac{1}{e}$, $x = -e$ è punto di minimo relativo con $f(-e) = -\frac{1}{e}$.



Dal Teorema dei valori intermedi ne deduciamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette:

-una sola soluzione per ogni $\alpha \in (-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$;

-due soluzioni per $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{e}$ e $\alpha = -\frac{1}{e}$;

-tre soluzioni per ogni $\alpha \in (-\frac{1}{e}, 0) \cup (0, \frac{1}{e})$.

Quindi la risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$.

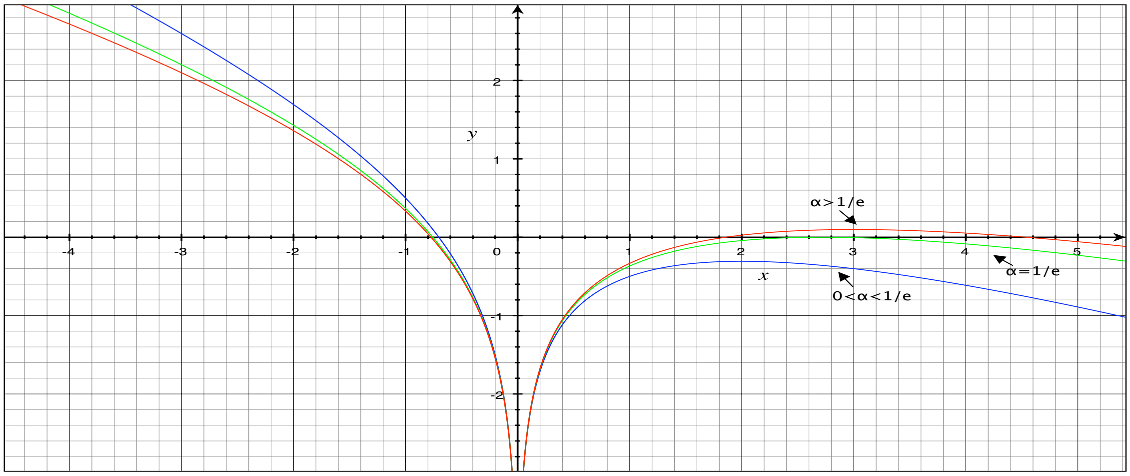
In alternativa, si poteva considerare la funzione $g_\alpha(x) = \log|x| - \alpha x$ e cercarne gli zeri al variare di $\alpha \in I\!R$. La funzione è definita e continua in $I\!R \setminus \{0\}$ con $\lim_{x\to 0} g_\alpha(x) = -\infty$ e

$$\lim_{x\to+\infty} g_\alpha(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} g_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

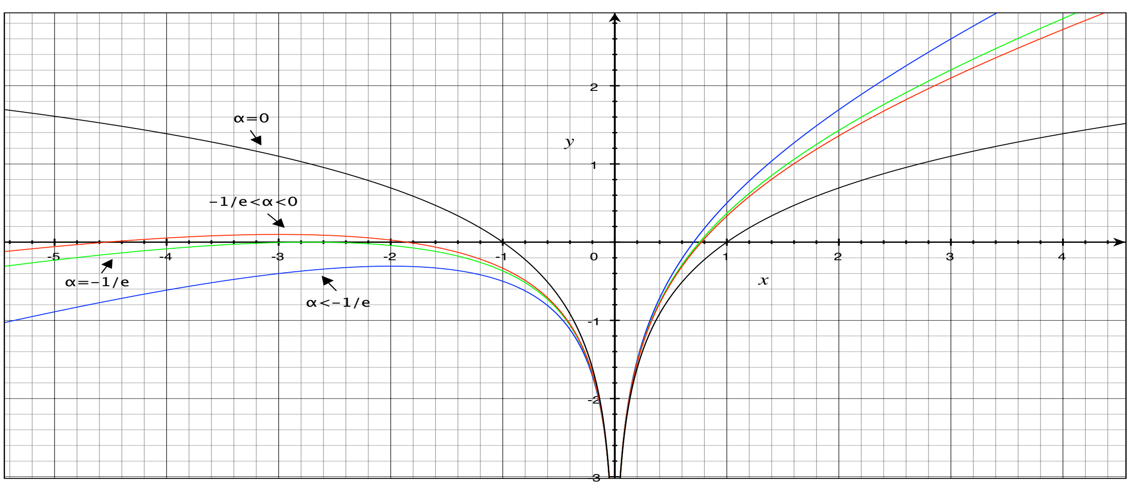
La funzione risulta derivabile in $I\!R \setminus \{0\}$ con

$$g'_\alpha(x) = \frac{1}{x} - \alpha.$$

Quindi se $\alpha > 0$ risulta $g'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \frac{1}{\alpha})$ e dunque si ha $g_\alpha(x)$ strettamente crescente in $(0, \frac{1}{\alpha})$, strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{\alpha}, +\infty)$ e $x = \frac{1}{\alpha}$ punto di massimo relativo con $g_\alpha(\frac{1}{\alpha}) = -\log\alpha - 1$. Poichè avremo $g_\alpha(\frac{1}{\alpha}) > 0$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{e}$, avremo che la funzione per $\alpha > \frac{1}{e}$ ammette un solo zero in $(-\infty, 0)$ e nessun zero in $(0, +\infty)$. Se $\alpha = \frac{1}{e}$, la funzione ammette un solo zero in $(-\infty, 0)$ ed un solo zero in $(0, +\infty)$. Se invece $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ avremo che la funzione ammette uno solo zero in $(-\infty, 0)$ e due zeri in $(0, +\infty)$.



Se $\alpha < 0$, risulta $g'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, \frac{1}{\alpha}) \cup (0, +\infty)$ e quindi $g_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $x \in (-\infty, \frac{1}{\alpha}) \cup (0, +\infty)$, strettamente decrescente in $(\frac{1}{\alpha}, 0)$ e $x = \frac{1}{\alpha}$ punto di massimo relativo con $g_\alpha(\frac{1}{\alpha}) = -\log(-\alpha) - 1$. Poichè si ha $g_\alpha(\frac{1}{\alpha}) > 0$ se e solo se $\alpha > -\frac{1}{e}$, avremo che la funzione per $\alpha < -\frac{1}{e}$ ammette un solo zero in $(0, +\infty)$ e nessun zero in $(-\infty, 0)$. Se $\alpha = -\frac{1}{e}$, la funzione ammette un solo zero in $(-\infty, 0)$ ed un solo zero in $(0, +\infty)$. Se invece $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$ avremo che la funzione ammette un solo zero in $(0, +\infty)$ e due zeri in $(-\infty, 0)$.
Se $\alpha = 0$ avremo invece che la funzione risulta strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Quindi la funzione ammetterà un solo zero in $(0, +\infty)$ ed un solo zero in $(-\infty, 0)$.



Riunendo quanto sopra otteniamo che la funzione ammette un solo zero per ogni $|\alpha| > \frac{1}{e}$, due zeri per $|\alpha| = \frac{1}{e}$ e $\alpha = 0$, tre zeri per ogni $0 < |\alpha| < \frac{1}{e}$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, detta h l'altezza della scatola e ℓ il lato della sua base, il volume della scatola sarà dato da $V = \ell^2 h$ mentre la sua superficie esterna sarà $S = 2\ell^2 + 4\ell h$. Poichè il volume è pari a 8, avremo che $h = \frac{8}{\ell^2}$ da cui $S = S(\ell) = 2\ell^2 + \frac{32}{\ell}$.
Le dimensioni della scatola di superficie esterna minima saranno date da $\ell_0 \times \ell_0 \times h_0$ dove ℓ_0 è il minimo di $S(\ell)$ per $\ell > 0$ e $h_0 = \frac{8}{\ell_0^2}$. Studiamo quindi la funzione $S(\ell) = 2\ell^2 + \frac{32}{\ell}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Risulta

$$S'(\ell) = 4\ell - \frac{32}{\ell^2} = 4\frac{\ell^3 - 8}{\ell^2}, \quad \forall \ell > 0$$

e quindi $S'(\ell) > 0$ se e solo se $\ell > \sqrt[3]{8} = 2$. Allora $\ell_0 = 2$ da cui $h_0 = 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, operando la sostituzione $2x + 1 = y$ (e quindi $dx = \frac{1}{2}dy$) ed integrando per parti due volte si ottiene

$$\int \frac{\log^2(2x+1)}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\log^2 y}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\frac{\log^2 y}{y^2} + \int \frac{\log y}{y^3}\,dy]$$
$$= \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\frac{\log^2 y}{y^2} - \frac{1}{2}\frac{\log y}{y^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^3}\,dy] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\frac{\log^2 y}{y^2} - \frac{1}{2}\frac{\log y}{y^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{y^2}] + c$$
$$= -\frac{1}{8y^2}(2\log^2 y + 2\log y + 1) + c = -\frac{1}{8(2x+1)^2}(2\log^2(2x+1) + 2\log(2x+1) + 1) + c$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{\log^2(2x+1)}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{8} - \frac{1}{72}(2\log^2 3 + 2\log 3 + 1)$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Notiamo innanzitutto che la funzione integranda $f_\alpha(x)$ risulta continua in $(0, 1]$ e che se $\alpha \leq 0$ allora $f_\alpha(x) \to 0$ per $x \to 0^+$. Quindi, se $\alpha \leq 0$, la funzione risulta limitata in $(0, 1]$ e dal criterio del confronto $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ risulta convergente. Se invece $\alpha > 0$, per $x \to 0^+$ si ha

$$e^{x^\alpha} - \cos x = x^\alpha + o(x^\alpha) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{se } \alpha = 2 \\ -\frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e quindi

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{e^{x^\alpha} - \cos x} \sim \begin{cases} x^{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } \alpha = 2 \\ -\frac{2}{x} & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Allora, se $\alpha > 0$, dal criterio del confronto asintotico segue allora che l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha < 2$. Riunendo quanto sopra, otteniamo che l'integrale converge per ogni $\alpha < 2$.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 22/03/2007

1) La successione $a_n = (e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n})\log(1+n^\alpha)$ per $n \to +\infty$ converge ad 0

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\sqrt{\cos x} - e^{x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} & \text{se } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ \beta & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}$, è continua nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\beta \in I\!R$ e $\alpha = 1$
$\boxed{\text{b}}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ per $\beta = 0$ e $\alpha = 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\log|x| = \frac{\alpha}{x^3}$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ 3 soluzioni per ogni $\alpha < \frac{1}{3e}$, $\alpha \neq 0$
$\boxed{\text{b}}$ una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ 2 soluzioni per ogni $\alpha > -1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = e^x \sin x - x\sqrt{1+\alpha x}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ 2 per ogni $\alpha \neq 0$
$\boxed{\text{c}}$ 3 per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x\log^2(x+1)\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $2\log 2 - \frac{5}{4}$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{5}{2} - 2\log 2$
$\boxed{\text{c}}$ $\frac{5}{4} - \log 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sin(x^\alpha) + x^2}\,dx$, $\alpha > 0$,

$\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha < 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, se $\alpha < 0$ avremo $\log(1+n^\alpha) \to 0$ e poichè $e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n} \to 0$, risulta $a_n \to 0$. Se $\alpha = 0$ allora $\log(1+n^\alpha) = \log 2$ e nuovamente $a_n \to 0$. Infine, se $\alpha > 0$, allora

$$\log(1+n^\alpha) = \alpha \log n + \log(1 + \frac{1}{n^\alpha}) \sim \alpha \log n$$

e poichè $e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1 + o(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, otteniamo

$$a_n \sim \alpha \frac{\log n}{n} \to 0$$

per la gerarchia degli infiniti. Dunque $a_n \to 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti se $\alpha \neq 1$ abbiamo $\alpha\sqrt{\cos x} - e^{x^2} \to \alpha - 1 \neq 0$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

ed $f(x)$ non risulterà continua in $x_0 = 0$. Se $\alpha = 1$ risulta

$$\sqrt{\cos x} - e^{x^2} = 1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1) + o(\cos x - 1) - 1 - x^2 + o(x^2) = -\frac{x^2}{4} - x^2 + o(x^2) = -\frac{5}{4}x^2 + o(x^2)$$

mentre

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2}x + o(x) = x + o(x)$$

e quindi

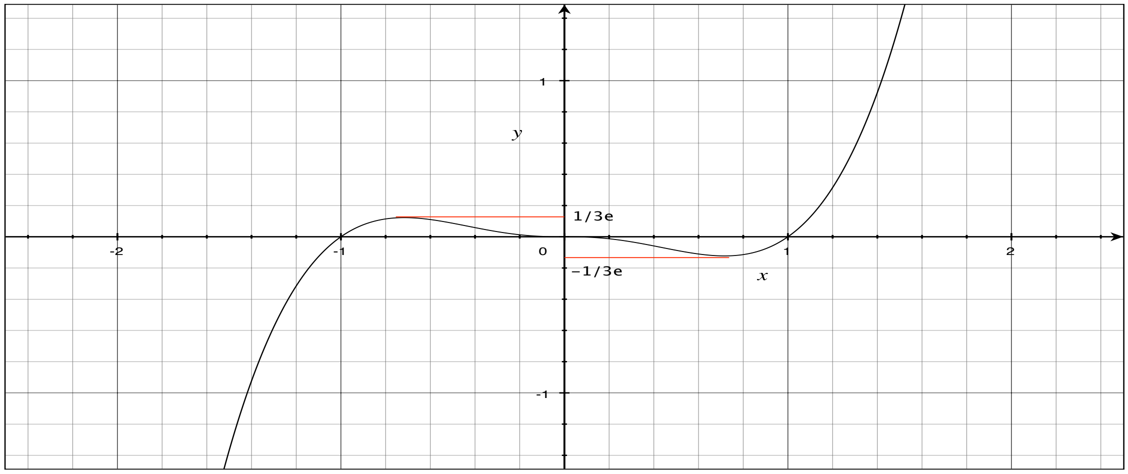
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{5}{4}x^2 + o(x^2)}{x + o(x)} = 0.$$

Poichè si ha $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \beta = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, otteniamo che $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Osserviamo innanzitutto che l'equazione è equivalente a $x^3 \log|x| = \alpha$. Consideriamo quindi la funzione $f(x) = x^3 \log|x|$ e studiamone l'immagine.
La funzione è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = 0$ mentre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
La funzione risulta inoltre derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$f'(x) = 3x^2 \log|x| + x^2 = x^2(3\log|x| + 3), \quad \forall x \neq 0.$$

Allora $f'(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > -\frac{1}{3}$ ovvero se e solo se $|x| > e^{-\frac{1}{3}}$. Quindi $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, -e^{-\frac{1}{3}})$ e $(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-e^{-\frac{1}{3}}, 0)$ e $(0, e^{-\frac{1}{3}})$, $x = -e^{-\frac{1}{3}}$ è punto di massimo relativo con $f(-e^{-\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3e}$, $x = e^{-\frac{1}{3}}$ è punto di minimo relativo con $f(e^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3e}$.



Dal Teorema dei valori intermedi ne deduciamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette:
-una sola soluzione per ogni $\alpha \in (-\infty, -\frac{1}{3e}) \cup (\frac{1}{3e}, +\infty)$;
-due soluzioni per $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{3e}$ e $\alpha = -\frac{1}{3e}$;
-tre soluzioni per ogni $\alpha \in (-\frac{1}{3e}, 0) \cup (0, \frac{1}{3e})$.
Quindi la risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$.

In alternativa, si poteva considerare la funzione $g_\alpha(x) = \log|x| - \frac{\alpha}{x^3}$ e cercarne gli zeri al variare di $\alpha \in I\!R$. La funzione è definita e continua in $I\!R \setminus \{0\}$ con $\lim_{x\to\pm\infty} g_\alpha(x) = +\infty$ e

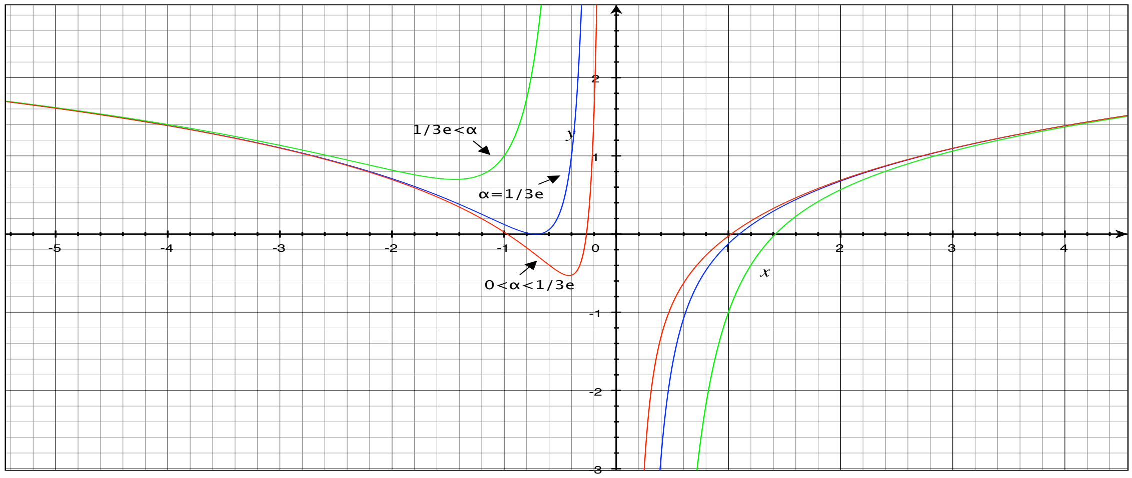
$$\lim_{x\to 0^+} g_\alpha(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha \geq 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} g_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

La funzione risulta derivabile in $I\!R \setminus \{0\}$ con

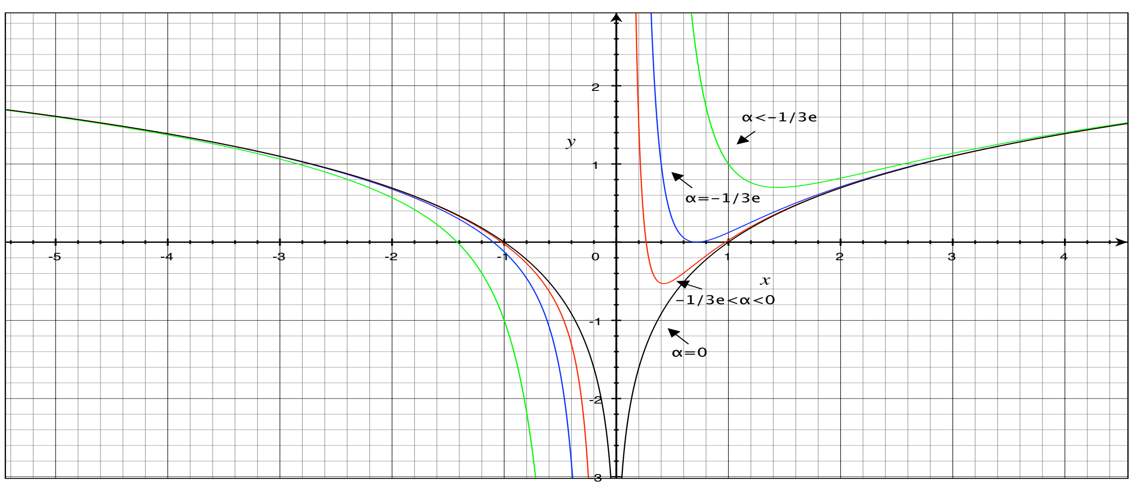
$$g'_\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{3\alpha}{x^4} = \frac{x^3 + 3\alpha}{x^4}.$$

Quindi risulta $g'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $x^3 + 3\alpha > 0$ ovvero se e solo se $x > \sqrt[3]{-3\alpha}$.

Dunque, se $\alpha > 0$ si ha $g_\alpha(x)$ strettamente crescente in $(\sqrt[3]{-3\alpha}, 0)$ e $(0, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-\infty, \sqrt[3]{-3\alpha})$ e $x = \sqrt[3]{-3\alpha}$ è punto di minimo relativo con $g_\alpha(\sqrt[3]{-3\alpha}) = \frac{1}{3}(\log(3\alpha) + 1)$. Poichè avremo $g_\alpha(\sqrt[3]{-3\alpha}) > 0$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{3e}$, avremo che la funzione per $\alpha > \frac{1}{3e}$ ammette un solo zero in $(0, +\infty)$ e nessun zero in $(-\infty, 0)$. Se $\alpha = \frac{1}{3e}$, la funzione ammette un solo zero in $(0, +\infty)$ ed un solo zero in $(-\infty, 0)$. Se invece $0 < \alpha < \frac{1}{3e}$ avremo che la funzione ammette uno solo zero in $(0, +\infty)$ e due zeri in $(-\infty, 0)$.



Se $\alpha < 0$ si ha $g_\alpha(x)$ strettamente crescente in $(\sqrt[3]{-3\alpha}, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e $(0, \sqrt[3]{-3\alpha})$ e $x = \sqrt[3]{-3\alpha}$ è punto di massimo relativo con $g_\alpha(\sqrt[3]{-3\alpha}) = \frac{1}{3}(\log(-3\alpha) + 1)$. Poichè si ha $g_\alpha(\sqrt[3]{-3\alpha}) > 0$ se e solo se $\alpha < -\frac{1}{3e}$, avremo che la funzione per $\alpha < -\frac{1}{3e}$ ammette un solo zero in $(-\infty, 0)$ e nessun zero in $(0. + \infty)$. Se $\alpha = -\frac{1}{3e}$, la funzione ammette un solo zero in $(-\infty, 0)$ ed un solo zero in $(0, +\infty)$. Se invece $-\frac{1}{3e} < \alpha < 0$ avremo che la funzione ammette un solo zero in $(-\infty, 0)$ e due zeri in $(0, +\infty, 0)$.
Se $\alpha = 0$ avremo invece che la funzione risulta strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Quindi la funzione ammetterà un solo zero in $(0, +\infty)$ ed un solo zero in $(-\infty, 0)$.



Riunendo quanto sopra abbiamo che la funzione ammette un solo zero per ogni $|\alpha| > \frac{1}{e}$, due zeri per $|\alpha| = \frac{1}{e}$ e $\alpha = 0$, tre zeri per ogni $0 < |\alpha| < \frac{1}{e}$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo risulta

$$\begin{aligned} f(x) = e^x \sin x - x\sqrt{1+\alpha x} &= (1 + x + o(x))(x + o(x^2)) - x(1 + \frac{\alpha}{2}x + o(x)) \\ &= x + x^2 - x - \frac{\alpha}{2}x^2 + o(x^2) = (1 - \frac{\alpha}{2})x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ avrà ordine di infinitesimo pari a 2 per ogni $\alpha \neq 2$ e maggiore di 2 per $\alpha = 2$. Dunque $\boxed{\text{a}}$, $\boxed{\text{b}}$ e $\boxed{\text{c}}$ sono false.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Per calcolare l'integrale si può procedere in diversi modi. Integrando direttamente per parti

$$\begin{aligned} &\int x \log^2(x+1)\ dx = \frac{x^2}{2}\log^2(x+1) - \int \frac{x^2}{x+1}\log(x+1)\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log^2(x+1) - \int (x-1)\log(x+1)\ dx - \int \frac{1}{x+1}\log(x+1)\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log^2(x+1) - \frac{(x-1)^2}{2}\log(x+1) + \int \frac{(x-1)^2}{2(x+1)}dx - \frac{1}{2}\log^2(x+1) \\ &= \frac{x^2}{2}\log^2(x+1) - \frac{(x-1)^2}{2}\log(x+1) + \frac{1}{2}\int x - 3 + \frac{4}{x+1}dx - \frac{1}{2}\log^2(x+1) = \\ &= \frac{x^2}{2}\log^2(x+1) - \frac{(x-1)^2}{2}\log(x+1) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + 2\log(x+1) - \frac{1}{2}\log^2(x+1) + c \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 x \log^2(x+1)\ dx = 2\log 2 - \frac{5}{4}$$

In alternativa, ponendo $y = x + 1$ (da cui $x = y - 1$ e quindi $dx = dy$), ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} &\int x \log^2(x+1)\ dx = \int (y-1)\log^2 y\ dy \\ &= \frac{y^2}{2}\log^2 y - \int y \log y\ dy - y\log^2 y + 2\int \log y\ dy \\ &= \frac{y^2}{2}\log^2 y - \frac{y^2}{2}\log y + \frac{1}{2}\int y\ dy - y\log^2 y + 2y\log y - 2y \\ &= \frac{y^2}{2}\log^2 y - \frac{y^2}{2}\log y + \frac{y^2}{4} - y\log^2 y + 2y\log y - 2y + c \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 x\log^2(x+1)\ dx = \int_1^2 (y-1)\log^2 y\ dy = 2\log 2 - \frac{5}{4}$$

Infine, operando la sostituzione $t = \log(x+1)$ (da cui $x = e^t - 1$ e quindi $dx = e^t dt$) ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int x\log^2(x+1)\ dx = \int (e^t-1)t^2e^t\ dt = \int t^2e^{2t}dt - \int t^2e^t\ dt \\
&= \frac{e^{2t}}{2}t^2 - \int te^{2t}\ dt - t^2e^t + 2\int te^t\ dt = \frac{e^{2t}}{2}t^2 - \frac{e^{2t}}{2}t + \frac{1}{2}\int e^{2t}\ dt - t^2e^t + 2te^t - 2e^t \\
&= \frac{e^{2t}}{2}t^2 - \frac{e^{2t}}{2}t + \frac{e^{2t}}{4} - t^2e^t + 2te^t - 2e^t + c
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^1 x\log^2(x+1)\ dx = \int_0^{\log 2}(e^t-1)t^2e^t\ dt = 2\log 2 - \frac{5}{4}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Notiamo innanzitutto che la funzione integranda $f_\alpha(x)$ risulta continua in $(0,1]$. Se $\alpha > 0$, per $x \to 0^+$ si ha

$$\sin(x^\alpha) + x^2 = x^\alpha + o(x^\alpha) + x^2 = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ 2x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 2 \\ x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e quindi

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{\sin(x^\alpha) + x^2} \sim \begin{cases} 1/x^{\alpha-1} & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ 1/x & \text{se } \alpha = 2 \\ 1/2x & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Allora, essendo $\alpha - 1 < 1$ per $\alpha < 2$, dal criterio del confronto asintotico segue che l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)\ dx$ converge se e solo se $\alpha < 2$.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 19/04/2007

1) La successione $a_n = \dfrac{\log(1+\frac{1}{n}) - \sin^\alpha \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$ per $n \to +\infty$ diverge

a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b) per ogni $\alpha \neq 1$
c) solo per $\alpha > 0$
d) nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} x^\alpha(1-\cos x) & \text{se } x > 0 \\ \beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

a) è continua per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha > -2$
b) è derivabile solo per $\beta = 0$ e $\alpha > -1$
c) è derivabile per $\beta = 0$ e $\alpha = -2$
d) nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\log(x^2 - 1) = x^2 + \alpha$ ammette

a) una soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b) due soluzioni per ogni $\alpha < 0$
c) quattro soluzioni per ogni $\alpha < -2$
d) nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \log(1+x)e^x - \sin x\sqrt{1+2x}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

a) 1
b) 4
c) 2
d) nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\, dx$ vale

a) $\frac{\pi}{2} - 1$
b) $\frac{\pi}{4} + 1$
c) $1 - \pi$
d) nessuna delle precedenti

6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{x^2} - \cos x}\, dx$

a) diverge per ogni $\alpha > 0$
b) converge per ogni $\alpha > 2$
c) converge per ogni $\alpha < 1$
d) nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osserviamo innanzitutto che essendo $\sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{x}{3}+o(x)$ per $x \to 0$, per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\sqrt[3]{n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1} = n^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}}) = n^{\frac{4}{3}}(\frac{2}{3n^4} + o(\frac{1}{n^4})) = \frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}})$$

Riguardo al numeratore, ricordando che dai limiti notevoli per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \text{ e } \sin^\alpha \frac{1}{n} = \frac{1}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha}),$$

si ottiene che se $\alpha > 1$ allora $\log(1+\frac{1}{n}) - \sin^\alpha \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ e dunque

$$a_n = \frac{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{\frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}})} \sim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}}} = \frac{3n^{\frac{5}{3}}}{2} \to +\infty.$$

Se $\alpha < 1$ allora $\log(1+\frac{1}{n}) - \sin^\alpha \frac{1}{n} = \frac{1}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})$ e dunque

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})}{\frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}})} \sim \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}}} = \frac{3n^{\frac{8}{3}-\alpha}}{2} \to +\infty,$$

essendo $\frac{8}{3} - \alpha > 0$. Infine, se $\alpha = 1$, risulta $\log(1+\frac{1}{n}) - \sin\frac{1}{n} = o(\frac{1}{n})$ e dagli sviluppi di Taylor si ottiene che $\log(1+\frac{1}{n}) - \sin\frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ e quindi

$$a_n = \frac{-\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{\frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}})} \sim \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{3n^{\frac{8}{3}}}} = -\frac{3n^{\frac{2}{3}}}{2} \to -\infty$$

Riunendo quanto ottenuto avremo che la successione diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, ricordando che $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{x^2}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+2}}{2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = -2 \\ 0 & \text{se } \alpha > -2 \end{cases}$$

ed essendo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \beta = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, otteniamo che $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ per $\alpha > -2$ se $\beta = 0$ e per $\alpha = -2$ se $\beta = \frac{1}{2}$.
Controlliamo la derivabilità per $\beta = 0$ e $\alpha > -2$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\frac{x^2}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } \alpha > -1 \end{cases}$$

e poichè $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, otteniamo che se $\beta = 0$, $f(x)$ risulterà derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > -1$.
Infine, se $\alpha = -2$ e $\beta = \frac{1}{2}$, dallo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ abbiamo

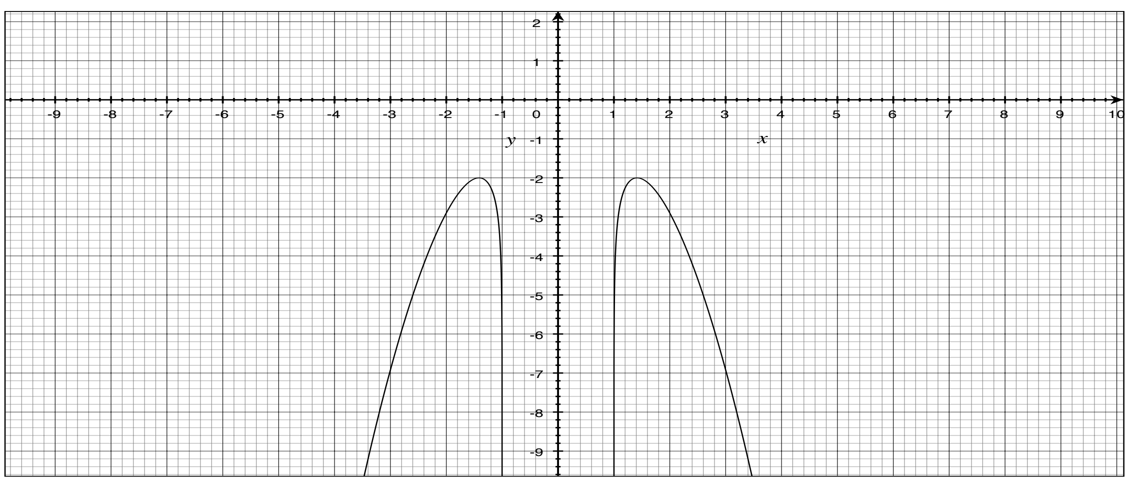
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}(1-\cos x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{24} = 0$$

mentre $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Otteniamo allora che se $\beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = -2$, $f(x)$ risulta derivabile in $x_0 = 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = \log(x^2 - 1) - x^2$ e studiamone l'immagine. La funzione è definita e continua in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e risultando funzione pari possiamo limitare lo studio in $(1, +\infty)$. Si ha $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.
La funzione risulta inoltre derivabile con

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - 2x = 2x\frac{2-x^2}{x^2-1}$$

e $f'(x) > 0$ in $(1, +\infty)$ se e solo se $x < \sqrt{2}$. Quindi $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(1, \sqrt{2})$, strettamente decrescente in $(\sqrt{2}, +\infty)$ e $x = \sqrt{2}$ è punto di massimo assoluto con $f(\sqrt{2}) = -2$.



Dal Teorema dei valori intermedi ne deduciamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ non ammette soluzioni per $\alpha > -2$, ammette due soluzioni per $\alpha = -2$ e quattro soluzioni per ogni $\alpha < -2$. Quindi la risposta corretta è $\boxed{\text{c}}$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli e dalle proprietà degli "o" piccolo, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
&\log(1+x)e^x = (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 + x + o(x)) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&\sin x\sqrt{1+2x} = (x + o(x^2))(1 + x + o(x)) = x + x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

quindi

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ed $f(x)$ ha ordine di infinitesimo pari a 2.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx = [x\arctan\sqrt{x}]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx =$$

ed operando la sostituzione $\sqrt{x} = t$ (e quindi $x = t^2$ e $dx = 2tdt$) si ottiene

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{4} - 1 + [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Notiamo innanzitutto che la funzione integranda $f_\alpha(x)$ risulta continua in $(0, +\infty)$ e l'integrale improprio risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.
Per $x \to +\infty$ risulta

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{e^{x^2}(1 - \frac{\cos x}{e^{x^2}})} \sim \frac{x^\alpha}{e^{x^2}}$$

e poichè $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^{x^2}} = 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, dal criterio del confronto asintotico si ottiene che $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Per $x \to 0^+$ si ha $e^{x^2} - \cos x = x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2$ e quindi

$$f_\alpha(x) \sim \frac{2}{3}\frac{x^\alpha}{x^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{2-\alpha}}$$

Dal criterio del confronto asintotico deduciamo che l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $2 - \alpha < 1$ ovvero $\alpha > 1$.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 21/06/2007

(1) La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$ per $n \to +\infty$ converge

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \geq 1$
$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha = 1$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha < 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2) La funzione $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \log(\sin x + 1) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\beta \in I\!R$ e $\alpha > -1$
$\boxed{\text{b}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per $\beta = 1$ e $\alpha = -1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f(x) = \dfrac{x}{\log|x|}$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{b}}$ $0 \in \mathrm{Im} f$
$\boxed{\text{c}}$ è monotona crescente
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) La funzione $f(x) = \cos(x^\alpha) - \sqrt{1 - \sin x}$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 1 per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ 2 per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ minore di 1 per ogni $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) La distanza minima tra il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ e l'origine del piano è

$\boxed{\text{a}}$ $1 + \log 2$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{2} + e^2$
$\boxed{\text{c}}$ $\sqrt{\frac{1}{2} + \log \sqrt{2}}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2x}}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $1 - \log 2$
$\boxed{\text{b}}$ $\log 2 - 1$
$\boxed{\text{c}}$ $2 \log 2 - 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Poniamo $a_n = e^{\log a_n} = e^{n\log(1+\frac{1}{n^\alpha})}$ e studiamo il comportamento dell'esponente $b_n = n\log(1+\frac{1}{n^\alpha})$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Osserviamo innanzitutto che se $\alpha < 0$ allora per $n \to +\infty$ $\log(1+\frac{1}{n^\alpha}) \to +\infty$ e quindi $b_n \to +\infty$. Se $\alpha = 0$ allora $\log(1+\frac{1}{n^\alpha}) = \log 2$ e nuovamente $b_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Se invece $\alpha > 0$ allora, dai limiti notevoli, $\log(1+\frac{1}{n^\alpha}) \sim \frac{1}{n^\alpha}$ per $n \to +\infty$ e quindi

$$b_n \sim n\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Da quanto ottenuto si ha allora che per $n \to +\infty$

$$a_n \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 1 \\ e & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

e quindi la successione converge per ogni $\alpha \geq 1$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, ricordando che $\log(1+\sin x) \sim \sin x \sim x$ per $x \to 0$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha x = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } \alpha > -1 \end{cases}$$

ed essendo $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \beta = f(0)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, otteniamo che $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ per $\alpha > -1$ se $\beta = 0$ e per $\alpha = -1$ se $\beta = 1$.
Controlliamo la derivabilità per $\beta = 0$ e $\alpha > -1$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

e poichè $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, otteniamo che se $\beta = 0$, $f(x)$ risulterà derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha > 0$.
Infine, se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, dallo sviluppo $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ e $\sin x = x + o(x^2)$ si ha

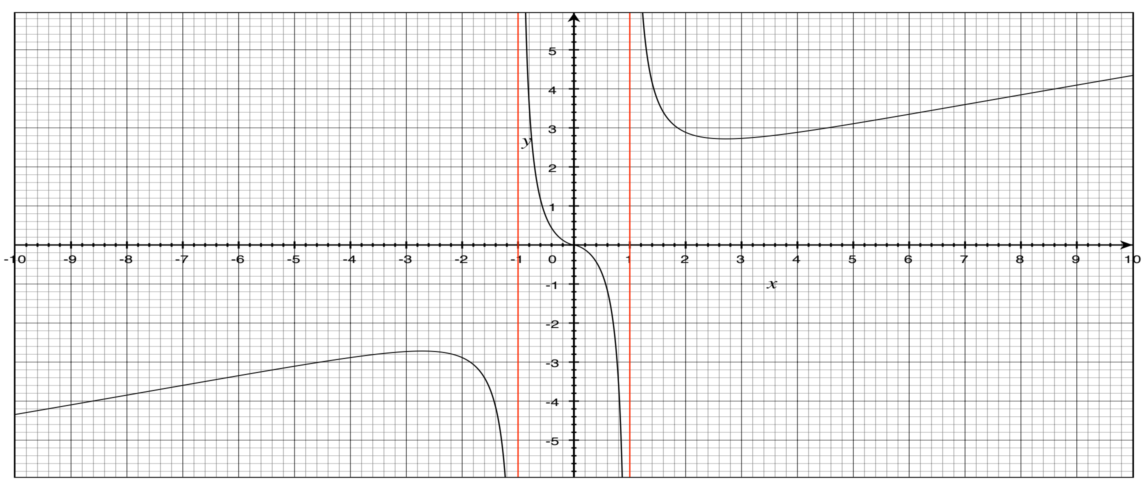
$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}\log(1+\sin x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

mentre $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Otteniamo allora che se $\beta = 1$ e $\alpha = -1$, $f(x)$ non risulta derivabile in $x_0 = 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione data è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ e risultando funzione dispari possiamo limitare lo studio in $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Si ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ne deduciamo che la funzione ammette un asintoto verticale in $x = 1$ e quindi che $\boxed{\text{a}}$ è falsa.
La funzione risulta inoltre derivabile in $(0,1)\cup(1,+\infty)$ con $f'(x) = \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}$ e $f'(x) > 0$ in $(0,1)\cup(1,+\infty)$ se e solo se $x > e$. Quindi $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(0,1)$ e $(1,e)$, strettamente crescente in $(e,+\infty)$ e $x = e$ è punto di minimo relativo con $f(e) = e$. Ne deduciamo allora che anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa.
Infine, essendo $f(x)$ strettamente decrescente in $(0,1)$ con $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, abbiamo che per ogni $x \in (0,1)$ $f(x) < 0$. Mentre essendo $f(x)$ strettamente decrescente in $(1,e)$ e strettamente crescente in $(e,+\infty)$ risulta $f(x) \geq f(e) > 0$ per ogni $x \in (1,+\infty)$. Ne segue allora che $0 \notin \mathrm{Im} f$. Quindi anche $\boxed{\text{b}}$ è falsa.



(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dagli sviluppi notevoli, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x^\alpha) - \sqrt{1-\sin x} &= 1 - \frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) - (1 - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{8}\sin^2 x + o(\sin^2 x)) \\ &= -\frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

quindi se $2\alpha > 1$ allora $ord(f(x)) = 1$, se $2\alpha = 1$ allora $ord(f(x)) = 2$ mentre se $2\alpha < 1$ allora $ord(f(x)) = 2\alpha < 1$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che la distanza tra l'origine $(0,0)$ e il generico punto del grafico di $f(x) = e^{-x^2}$ è data da $\sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + e^{-2x^2}}$, cerchiamo il minimo della funzione $d(x) = x^2 + e^{-2x^2}$. Osserviamo innanzitutto che poichè $d(x)$ è pari ci limiteremo a studiare la funzione in $[0, +\infty)$.
Tale funzione è definita e derivabile in $[0, +\infty)$ con $d'(x) = 2x - 4xe^{-2x^2} = 2x(1 - 2e^{-2x^2})$. Abbiamo $d'(x) > 0$ per $x > 0$ se e solo se $2e^{-x^2} < 1$ ovvero se e solo se $x > \sqrt{\log\sqrt{2}}$. Ne risulta allora che $d(x)$ è strettamente crescente in $(\sqrt{\log\sqrt{2}}, +\infty)$, strettamente decrescente in $(0, \sqrt{\log\sqrt{2}})$ e quindi che $x_0 = \sqrt{\log\sqrt{2}}$ è punto di minimo assoluto con $d(x_0) = \frac{1}{2} + \log\sqrt{2}$. Ne segue allora che distanza minima tra l'origine $(0,0)$ e il generico punto del grafico di $f(x) = e^{-x^2}$ è $\sqrt{\frac{1}{2} + \log\sqrt{2}}$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Calcoliamo innanzitutto $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}dx$. Operando la sostituzione $t = e^x$ (e quindi $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}dt$) otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}dx &= \int \frac{1}{t^2(t+1)}dt = \int \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}dt \\
&= -\frac{1}{t} + \log|1 + \frac{1}{t}| + c = -\frac{1}{e^x} + \log(1 + \frac{1}{e^x}) + c
\end{aligned}$$

Allora, dalla definizione di integrale improprio, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2x}}dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{e^x + e^{2x}}dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{e^x} + \log(1 + \frac{1}{e^x})\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{e^b} + \log(1 + \frac{1}{e^b}) + 1 - \log 2 = 1 - \log 2
\end{aligned}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12/07/2007

(1) La successione $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0
$\boxed{\text{b}}$ converge a 1
$\boxed{\text{c}}$ diverge a $+\infty$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ non è derivabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per ogni $\alpha = \beta$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(3) La funzione $f(x) = \dfrac{x}{e^{|x^2-1|}}$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti
$\boxed{\text{b}}$ $\mathrm{Im} f = [-1, 1]$
$\boxed{\text{c}}$ è monotona crescente
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(4) Sia $f(x)$ funzione infinitesima di ordine 3 per $x \to 0$ allora

$\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x \sin x} = +\infty$
$\boxed{\text{b}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\log(1+x^3)} = 0$
$\boxed{\text{c}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(e^x - \sqrt{1+2x})^2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) Determinare

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\sin(x)}\,\log(1+\sin(x))\,dx\,.$$

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{2\sqrt{8}}{3}\log(2) - \frac{4}{9}(1-\sqrt{8})$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{2\sqrt{8}}{3}\log(2) + \frac{4}{9}(1+\sqrt{8})$
$\boxed{\text{c}}$ $\frac{2\sqrt{8}}{3}\log(2) - \frac{4}{9}(1+\sqrt{8})$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}}{x^\alpha}\,dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha < 1$
$\boxed{\text{b}}$ diverge per ogni $\alpha \geq \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha > \frac{1}{3}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, ricordando che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, otteniamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0$$

e dal criterio del rapporto ne deduciamo che $a_n \to 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \alpha + \frac{\alpha^2}{2}x + o(x) = \alpha.$$

Essendo $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \beta = f(0)$, concludiamo che la funzione risulta continua solo se $\alpha = \beta$. Supponendo $\alpha = \beta$, consideriamo la derivabilità di $f(x)$. Osserviamo che $f(x)$ ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ uguale a zero. Inoltre essendo $f(0) = \beta = \alpha$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{\alpha x}-1}{x} - \alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x} - 1 - \alpha x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

e concludiamo che $f(x)$ ammette derivata destra in $x_0 = 0$ uguale a $\frac{\alpha^2}{2}$. Si ottiene allora che $f(x)$ risulta derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha = \beta = 0$.

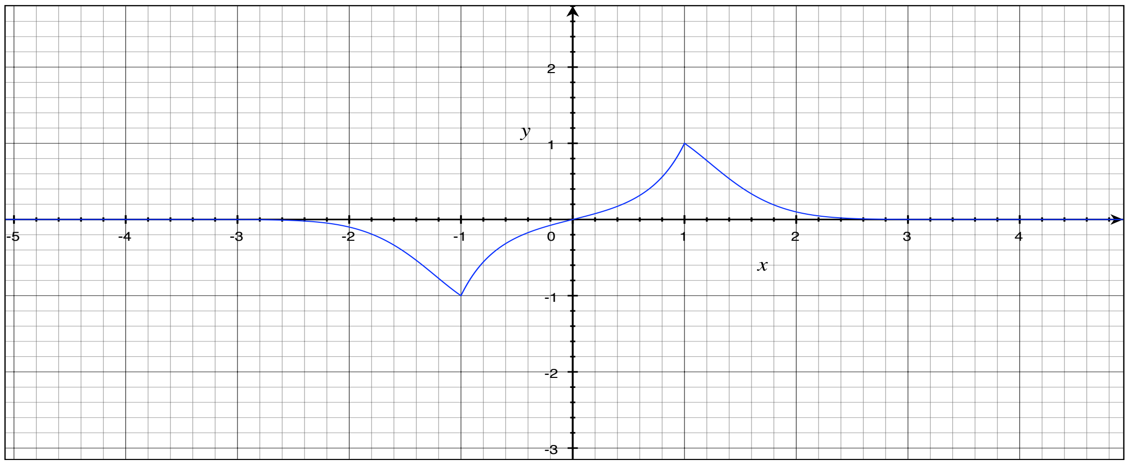
(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. La funzione data è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ essendo $e^{|x^2-1|} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dalla gerarchia degli infiniti si ha che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ne deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orrizzontale per $f(x)$ (e quindi $\boxed{\text{a}}$ è falsa).
Osservato che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{x^2-1}} & \text{se } |x| \geq 1 \\ \frac{x}{e^{1-x^2}} & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

la funzione risulta derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x^2}{e^{x^2-1}} & \text{se } |x| > 1 \\ \frac{1+2x^2}{e^{1-x^2}} & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Essendo $1 - 2x^2 < -1$ per ogni $|x| > 1$, avremo $f'(x) < 0$ per ogni $|x| > 1$ mentre, essendo $1 + 2x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ avremo che $f'(x) > 0$ per ogni $|x| < 1$. Quindi $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e strettamente crescente in $(-1, 1)$ (e quindi $\boxed{\text{c}}$ è falsa). Ne segue che $x = -1$ è punto di minimo assoluto con $f(-1) = -1$ e che $x = 1$ è punto di massimo assoluto con $f(1) = 1$.



Essendo la funzione continua in tutto $\mathbb{R}$, dal Teorema dei valori intermedi otteniamo che $\mathrm{Im} f = [\min_{x\in\mathbb{R}} f(x), \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)] = [-1, 1]$ e quindi $\boxed{\text{b}}$ è vera.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, essendo $\mathrm{ord} f(x) = 3$ per $x \to 0$ avremo che $f(x) = \ell x^3 + o(x^3)$ per qualche costante $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora, ricordando che $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$, avremo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = 0$$

e quindi $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Ricordando che $\log(1 + y) = y + o(y)$ per $y \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\log(1 + x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e quindi $\boxed{\text{b}}$ è falsa. Infine, ricordando che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e che $\sqrt{1 + 2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x)}{(e^x - \sqrt{1 + 2x^2})^2} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{\ell x^3 + o(x^3)}{(x^2 + o(x^2))^2} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{\ell x^3 + o(x^3)}{x^4 + o(x^4)} \right| = +\infty$$

e quindi anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Operando la sostituzione $1 + \sin x = t$ (e quindi $dt = \cos x\, dx$) ed integrando per parti si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \sin x} \log(1 + \sin x) dx = \int_1^2 \sqrt{t} \log t = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \log t \right]_1^2 - \frac{2}{3} \int_1^2 t^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t}\, dt$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{8} \log 2 - \frac{4}{9} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{8} \log 2 - \frac{4}{9}\sqrt{8} + \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{8}}{3} \log 2 - \frac{4}{9}(\sqrt{8} - 1)$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osservato che l'integranda è definita e continua in tutto $[1, +\infty)$ per stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale converge studiamo il comportamento per $x \to +\infty$. Ricordando che $\sqrt[3]{1+y} - 1 \sim \frac{y}{3}$ per $y \to 0$, per $x \to +\infty$ si ottiene

$$\frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x}}{x^\alpha} = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1)}{x^\alpha} \sim \frac{\sqrt[3]{x}\frac{1}{3x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha+\frac{2}{3}}}$$

Dal criterio del confronto asintotico deduciamo allora che l'integrale risulta convergente se e solo se $\alpha + \frac{2}{3} > 1$ ovvero se e solo se $\alpha > \frac{1}{3}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12/09/2007

(1) Il limite $\lim_{x\to 0}(1+|x|)^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{|x|}{x}}$

[a] non esiste
[b] esiste e vale e
[c] esiste e vale 0
[d] nessuna delle precedenti

(2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta - \arcsin(1-x)}{x^\alpha} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$ è continua

[a] per $\beta = \frac{\pi}{2}$ e ogni $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
[b] per $\beta = \frac{\pi}{2}$ e ogni $\alpha > 0$
[c] per $\beta = 0$ e ogni $\alpha > 1$
[d] nessuna delle precedenti

(3) L'equazione della retta tangente alla circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 1$ nel punto $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ è:

[a] $y = \frac{3}{2}(x-1)$
[b] $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})$
[c] $y = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{1}{2})$
[d] nessuna delle precedenti

(4) Sia $f(x)$ funzione infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$ allora

[a] $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+2x} - e^x} = +\infty$
[b] $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{\cos x} - 1} = 0$
[c] $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sin(x^2) - \log(1+x)} \in I\!R \setminus \{0\}$
[d] nessuna delle precedenti

(5) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \cos x \, e^x \, dx$ vale

[a] $e^{\frac{\pi}{2}} + 1$
[b] $\frac{1}{3}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$
[c] $\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$
[d] nessuna delle precedenti

(6) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log x}{e^x - \sqrt{1+\alpha x}} \, dx$

[a] converge per ogni $\alpha \neq 2$
[b] converge per ogni $\alpha \in I\!R$
[c] diverge per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$
[d] nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha}$ per ogni $\alpha \in I\!R$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+}(1+|x|)^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{|x|}{x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}(1+|x|)^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{|x|}{x}} = \lim_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1} = 0$$

Quindi il limite esiste e vale 0.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osserviamo che $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ed affinchè la funzione risulti continua in 0 dovrà essere $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Se $\alpha < 0$ allora $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ per ogni $\beta \in I\!R$ e quindi la funzione risulta continua. Se $\alpha = 0$ allora $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \beta - \dfrac{\pi}{2}$ e la funzione risulta continua solo se $\beta = \frac{\pi}{2}$. Se $\alpha > 0$ e se $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ allora $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ e la funzione non risulta continua. Se invece $\beta = \frac{\pi}{2}$ allora, per il Teorema di De l'Höpital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha\sqrt{2}x^{\alpha-\frac{1}{2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

e la funzione risulterà continua solo per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. La funzione $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ in $[0,2]$ ha per grafico la semicirconferenza superiore contenente il punto $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. La retta tangente alla circonferenza nel punto P coincide dunque con la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x_0 = \frac{1}{2}$ e dunque ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})$ essendo $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ per ogni $x \in (0,2)$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, essendo $\text{ord} f(x) = 2$ per $x \to 0$ avremo che $f(x) = \ell x^2 + o(x^2)$ per qualche costante $\ell \in I\!R \setminus \{0\}$. Allora, ricordando che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e che $\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1+2x} - e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = -\ell \in I\!R \setminus \{0\}$$

e quindi $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Ricordando che $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ per $y \to 0$, ponendo $y = \cos x - 1$, per $x \to 0$ otteniamo $\sqrt{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1) + o(\cos x - 1)$. Essendo $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, avremo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{\cos x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)} = -4\ell \in I\!R \setminus \{0\}$$

e quindi $\boxed{\text{b}}$ è falsa. Infine, ricordando che $\log(1+x) = x + o(x)$ e che $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin(x^2) - \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2) - (x + o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell x^2 + o(x^2)}{-x + o(x)} = 0$$

e quindi anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti integrando per parti due volte (scegliendo e^x come fattore differenziale) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \sin x \cos x e^x dx = e^x \sin x \cos x - \int (\cos^2 x - \sin^2 x) e^x dx \\ &= e^x \sin x \cos x - e^x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\int \sin x \cos x e^x dx \\ &= e^x(\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x) - 4\mathcal{I}\end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{I} = \int \sin x \cos x e^x dx = \frac{1}{5} e^x(\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x) + c$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x e^x dx = \frac{1}{5}\left[e^x(\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

In alternativa, osservato che $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, integrando per parti due volte (scegliendo nuovamente e^x come fattore differenziale) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \sin x \cos x \; e^x dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, e^x dx = \frac{1}{2} e^x \sin(2x) - \int \cos(2x)\, e^x dx \\ &= \frac{1}{2} e^x \sin(2x) - e^x \cos(2x) - 2\int \sin(2x)\, e^x dx \\ &= \frac{1}{2} e^x(\sin(2x) - 2\cos(2x)) - 4\int \sin x \cos x \, e^x dx \\ &= \frac{1}{2} e^x(\sin(2x) - 2\cos(2x)) - 4\mathcal{I}\end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{I} = \int \sin x \cos x \; e^x dx = \frac{1}{10} e^x(\sin(2x) - 2\cos(2x)) + c$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x e^x dx = \frac{1}{10}\left[e^x(\sin(2x) - 2\cos(2x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10}(2e^{\frac{\pi}{2}} + 2) = \frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, osservato che l'integranda è definita e continua in $(0,+\infty)$, l'integrale risulterà convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\log x}{e^x - \sqrt{1+\alpha x}}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log x}{e^x - \sqrt{1+\alpha x}}\,dx$.

Per stabilire per quali valori di $\alpha \in I\!\!R$ il primo integrale converge studiamo il comportamento di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\log x}{e^x - \sqrt{1+\alpha x}}$ per $x \to 0$. Ricordando che $\sqrt{1+\alpha x} = 1 + \frac{\alpha x}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{8} + o(x^2)$ e che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, si ha $e^x - \sqrt{1+\alpha x} = (1-\frac{\alpha}{2})x + (\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2}{8})x^2 + o(x^2)$. Dunque, se $\alpha \neq 2$, avremo

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}\log x}{(1-\frac{\alpha}{2})x} = \frac{\log x}{(1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{x}}$$

L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ risulta convergente, in quanto $\dfrac{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^p}} = \dfrac{\log x}{x^{\frac{1}{2}-p}} \to 0$ per ogni $p < \frac{1}{2}$. Dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che se $\alpha \neq 2$ allora $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge.
Se invece $\alpha = 2$ avremo

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}\log x}{x^2} = \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}}$$

L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ risulta divergente, in quanto risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} x^{p-\frac{3}{2}}\log x = \begin{cases} -\infty & \text{se } p \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{se } p > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che se $\alpha = 2$ allora $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge.

Studiamo ora il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Dalla gerarchia degli infiniti, per $x \to +\infty$ si ha:

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \frac{x^{p+\frac{1}{2}}\log x}{e^x(1 - \frac{\sqrt{1+\alpha x}}{e^x})} \to 0$$

per ogni $p > 0$ e ogni $\alpha \in I\!\!R$. Dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge per ogni $\alpha \in I\!\!R$.
Riunendo quanto ottenuto, abbiamo che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha \neq 2$.