

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 9/12/2004

(1) La successione $\frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

a converge ad e

c diverge

b converge a \sqrt{e}

d nessuna delle precedenti

(2) L'integrale $\int_0^1 \left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)^\alpha dx$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

a converge se e solo se $\alpha > 0$

c non converge per alcun α

b converge per ogni $\alpha < -2$

d converge se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$

(3) La funzione $f(x) = \arctan \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$

a ha un asintoto obliquo

c è monotona

b ammette minimo

d è derivabile nel suo dominio

(4) L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$ vale

a $\frac{\pi}{2}$

c $-\frac{\pi}{2}$

b 0

d nessuna delle precedenti

(5) La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a-1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x+a & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x = 0$

a è continua in $\forall a \in \mathbb{R}$

c è derivabile $\forall a > 1$

b è continua ma non derivabile $\forall a \geq 1$

d nessuna delle precedenti

(6) La funzione $f(x) = \sqrt{1-x^4} - \cos(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ ha ordine di infinitesimo

a 4

c 6

b 8

d nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

(1) La risposta esatta è la **[b]**. Infatti, osservato che

$$\frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{e^n}{e^{n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = e^{n - n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

possiamo limitarci a determinare il comportamento della successione $n - n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. A tale scopo, ricordando che $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, posto $x = \frac{1}{n}$ si ottiene

$$n - n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n - n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2} + o(1)$$

per $n \rightarrow +\infty$. Ne segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ e dunque che $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n - n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

(2) La risposta esatta è la **[d]**. Infatti, ricordando che per $x \rightarrow 0$, $\sin x \sim x$ e $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, da cui $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$, otteniamo

$$\frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{x - \sin x}{x} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x} = \frac{x^2}{6}$$

e dunque che

$$\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)^\alpha \sim \frac{x^{2\alpha}}{6^\alpha}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Poichè l'integrale $\int_0^1 x^{2\alpha} dx$ converge se e solo se $2\alpha > -1$, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato risulta convergente se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

(3) La risposta esatta è **[b]**. Infatti, osservato che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq -1$ e che $f(1) = 0$, si ottiene immediatamente che $x = 1$ è punto di minimo per $f(x)$. Al medesimo risultato si poteva arrivare osservato che $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$. Dunque **[a]** è falsa. La funzione risulta poi continua in $\text{dom}(f)$ e derivabile in $\text{dom}(f) \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x(x+1)} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{se } x < -1 \text{ e } x > 1 \\ -\frac{1}{2(x+1)} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

dunque **[d]** è falsa e poichè il segno di $f'(x)$ non è costante, anche **[c]** è falsa. Dallo studio del segno di $f'(x)$ si deduce anche che $x = 1$ è un minimo.

(4) La risposta esatta è la **[a]**. Infatti, ponendo $t = \sqrt{x}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} &= 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} - 2 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2 \arctan t + \int t \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale si può procedere integrando per parti riconoscendo $\frac{-2t}{(1+t^2)^2} = D\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$:

$$\int t \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t}{1+t^2} - \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t}{1+t^2} - \arctan t + c$$

Allora

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} + c$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right]_a^1 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right]_1^b = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

mentre $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, otteniamo che la funzione data è continua in $x = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$. Quindi $\boxed{\text{a}}$ e $\boxed{\text{b}}$ sono false. Anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa poichè non essendo f continua in $x = 0$ per $a > 1$ non potrà nemmeno essere derivabile.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti ricordando che $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y^2 + o(y^2)$ per $y \rightarrow 0$, ponendo $y = -x^4$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\sqrt{1-x^4} = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8), \quad x \rightarrow 0$$

Inoltre, essendo $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$ per $y \rightarrow 0$, ponendo $y = x^2$ otteniamo

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^8), \quad x \rightarrow 0$$

Allora

$$f(x) = \sqrt{1-x^4} - \cos(x^2) = -\frac{x^8}{8} - \frac{x^8}{24} + o(x^8) = -\frac{x^8}{6} + o(x^8), \quad x \rightarrow 0$$

e $\text{ord}(f(x)) = 8$.

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 23/12/2004

Domanda filtro Risolvere la disequazione $|\frac{2}{x}| \geq 1 - x$.

1) La funzione $f(x) = \log(1 + e^x)$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) ammette un asintoto obliquo | <input type="checkbox"/> b) è limitata |
| <input type="checkbox"/> c) ammette minimo | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

2) L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3}}{\arctan \frac{1}{x^\alpha}} dx$

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) converge se e solo se $\alpha \leq 0$ | <input type="checkbox"/> b) diverge se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> c) converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

3) La funzione $f(x) = x^2 - \log \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ per $x \rightarrow 0$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) ha ordine di infinitesimo 2 | <input type="checkbox"/> b) è $o(x^4)$ |
| <input type="checkbox"/> c) ha ordine di infinitesimo 4 | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

4) L'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x^3}} dx$

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) diverge | <input type="checkbox"/> b) converge e vale $e - 2$ |
| <input type="checkbox"/> c) converge e vale $4 - 2e$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

5) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) non è continua per alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> b) se $\alpha = 1$ è derivabile con $f'(0) = \frac{1}{2}$ |
| <input type="checkbox"/> c) se $\alpha = 1$ è continua ma non derivabile | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

6) L'equazione $|\log x| = \frac{\alpha}{x}$,

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) non ammette soluzioni per ogni $\alpha > 1$ | <input type="checkbox"/> b) ammette una sola soluzione per $\alpha \geq 1$ |
| <input type="checkbox"/> c) ammette tre soluzioni per $0 < \alpha < e$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

SOLUZIONE

Domanda filtro: $x \geq -1, x \neq 0$

(1) La risposta esatta è la **[a]**. Infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e scrivendo $f(x) = x + \log(1 + e^{-x})$ si ottiene immediatamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \log(1 + e^{-x})}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + e^{-x}) = 0$$

Quindi $y = x$ è asintoto obliquo destro per $f(x)$.

(2) La risposta esatta è la **[c]**. Infatti, osserviamo innanzitutto che per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1} \sim \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Mentre si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Ne segue che se $\alpha < 0$ allora per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3}}{\arctan \frac{1}{x^\alpha}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi \sqrt{x^3}}$$

ed essendo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ convergente, dal criterio del confronto asintotico si deduce che l'integrale dato converge. Analogamente se $\alpha = 0$.

Se $\alpha > 0$, ricordando che $\arctan y \sim y$ per $y \rightarrow 0$, si ottiene $\arctan \frac{1}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \rightarrow +\infty$ e quindi

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3}}{\arctan \frac{1}{x^\alpha}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x^3}} x^\alpha = \frac{1}{x^{\frac{3}{2} - \alpha}}$$

Essendo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2} - \alpha}}$ convergente se e solo se $\frac{3}{2} - \alpha > 1$, dal criterio del confronto asintotico si deduce che per $\alpha > 0$ l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$. Riunendo i risultati ottenuti si deduce che l'integrale converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

(3) La risposta esatta è **[b]**. Infatti ricordando che $\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \rightarrow 0$, per $x \rightarrow 0$ risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \log \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = x^2 - \frac{1}{2}(\log(1+x^2) - \log(1-x^2)) = \\ &= x^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = o(x^4) \end{aligned}$$

(4) La risposta esatta è la **[d]**. Infatti, operando la sostituzione $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (e quindi $x = \frac{1}{t^2}$ e $dx = -2\frac{1}{t^3}dt$), si ottiene

$$\int \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\sqrt{x^3}} dx = -2 \int (e^t - 1) dt = -2(e^t - t) + c = -2\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + c$$

e dunque

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\sqrt{x^3}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\sqrt{x^3}} dx = -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_1^b = \\ &= -2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{b}} - e + 1 \right) = -2(2 - e) = 2e - 4 \end{aligned}$$

(5) La risposta esatta è la **[b]**. Infatti, osserviamo innanzitutto che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è funzione derivabile in ogni $x \neq 0$ essendo rapporto di funzioni derivabili. Abbiamo poi che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e dunque, essendo $f(0) = \alpha$, $f(x)$ risulterà continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$ (quindi **[a]** è falsa). Per $\alpha = 1$, essendo $f(0) = 1$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $f(x)$ per $\alpha = 1$ è derivabile in tutto \mathbb{R} (**[c]** è falsa) con $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(6) La risposta esatta è la **[b]**.

Considerata la funzione $f_\alpha(x) = |\log x| - \frac{\alpha}{x}$, risolvere l'equazione data equivale a determinare gli zeri di $f_\alpha(x)$.

Studiamo quindi la funzione $f_\alpha(x)$ limitandoci a considerare il caso $\alpha > 0$.

Si ha che $f_\alpha(x)$ è definita e continua in $(0, +\infty)$. Inoltre, ricordando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \log x = 0$ per ogni $a > 0$, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x}(x \log x + \alpha) = -\infty$$

mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. Dal Teorema di esistenza degli zeri possiamo allora affermare che $f_\alpha(x)$ ammette almeno uno zero in $(0, +\infty)$ per ogni $\alpha > 0$. Quindi **[a]** è falsa. Per determinare il numero esatto degli zeri di $f_\alpha(x)$, studiamone la monotonia. A tale scopo si osservi che $f_\alpha(x)$ è derivabile in ogni $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ con

$$f'_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\alpha+x}{x^2} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\alpha-x}{x^2} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente che $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x > 1$, avendo supposto $\alpha > 0$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(1, +\infty)$ ed essendo $f_\alpha(1) = -\alpha < 0$ mentre

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ne deduciamo che $f_\alpha(x) = 0$ ammette una ed una sola soluzione in $(1, +\infty)$ per ogni $\alpha > 0$.

Si osservi ora che se $\alpha \geq 1$, si ha che $\alpha - x \geq 1 - x > 0$ per ogni $0 < x < 1$ e quindi che $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(0, 1)$ ed essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = -\infty$ e $f_\alpha(1) < 0$, ne deduciamo che $f_\alpha(x) = 0$ non ammette soluzioni in $(0, 1)$ per ogni $\alpha \geq 1$.

Dai risultati sopra segue che l'equazione data ammette una ed una sola soluzione per ogni $\alpha \geq 1$. Quindi $\boxed{\mathbf{c}}$ è falsa e $\boxed{\mathbf{b}}$ è vera.

In alternativa, si poteva osservare che posto $g(x) = x|\log x|$ l'equazione data è equivalente a $g(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo quindi l'immagine della funzione $g(x)$. Si ha innanzitutto che $g(x)$ è definita e continua in tutto $(0, +\infty)$ con $g(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Dal Teorema dei valori intermedi deduciamo allora che $g(x)$ assume tutti i valori $\alpha \in [0, +\infty)$. Per conoscere il numero esatto di controimmagini di ogni $\alpha \geq 0$, studiamo la monotonia di $g(x)$. La funzione è derivabile in ogni $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ con

$$g'(x) = \begin{cases} -(\log x + 1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \log x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente che $g'(x) > 0$ per ogni $x > 1$ mentre per $0 < x < 1$ si ha $g'(x) > 0$ se e solo se $\log x + 1 < 0$ e quindi se e solo se $x < \frac{1}{e}$.

Ne segue che $g(x)$ è strettamente crescente in $(0, \frac{1}{e})$ e in $(1, +\infty)$, $g(x)$ è strettamente decrescente in $(\frac{1}{e}, 1)$, $x = \frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo per $g(x)$ con $g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ mentre $x = 1$ è punto di minimo assoluto con $g(1) = 0$. Dall'analisi sopra segue che l'equazione $g(x) = \alpha$:

- ammette una sola soluzione per $\alpha > \frac{1}{e}$ e $\alpha = 0$;
- ammette due soluzioni per $\alpha = \frac{1}{e}$;
- ammette tre soluzioni per $0 < \alpha < \frac{1}{e}$;
- non ammette soluzioni per $\alpha < 0$.

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 12/01/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\log(1 - \frac{1}{x}) \leq 0$.

1) La successione $a_n = \frac{1 - n(\log(n+1) - \log n)}{\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha}}$, con $\alpha > 0$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) converge a 0 se $\alpha > 1$ | <input type="checkbox"/> b) converge a $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$ |
| <input type="checkbox"/> c) diverge a $+\infty$ se $\alpha > 2$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

2) L'equazione $(\alpha - x)e^x = 1$

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) ammette una soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> b) ammette due soluzioni se e solo se $\alpha > 1$ |
| <input type="checkbox"/> c) non ammette soluzioni per $\alpha > 0$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

3) La funzione $f(x) = \arctan \frac{x}{x-1}$

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) ha un asintoto obliquo | <input type="checkbox"/> b) è limitata |
| <input type="checkbox"/> c) ammette massimo | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

4) La funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^{1/x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$, nel punto 0

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) non è continua | <input type="checkbox"/> b) è derivabile con $f'(0) = 1$ |
| <input type="checkbox"/> c) è continua ma non derivabile | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

5) L'integrale $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ vale

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) 0 | <input type="checkbox"/> b) 1 |
| <input type="checkbox"/> c) $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

6) L'integrale $\int_0^1 \frac{1 - \cos x^2}{x^\alpha} dx$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) converge se e solo se $\alpha < 5$ | <input type="checkbox"/> b) converge se e solo se $\alpha < 0$ |
| <input type="checkbox"/> c) converge se e solo se $\alpha \geq 4$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

SOLUZIONE

Domanda filtro: $x > 1$

(1) La risposta esatta è la **c**. Infatti, ricordando che $\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$1 - n(\log(n+1) - \log n) = 1 - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

mentre, ricordando che $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, essendo $\alpha > 0$ si ottiene

$$\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha} = \sqrt{n^\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right) = \sqrt{n^\alpha} \left(\frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right) = \frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right) \sim \frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Quindi per $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$\frac{1 - n(\log(n+1) - \log n)}{\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha}} \sim \frac{2n^{\frac{\alpha}{2}}}{2n} = n^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

e se $\alpha > 2$ la successione diverge a $+\infty$.

(2) La risposta esatta è la **b**. Considerata la funzione $f_\alpha(x) = (\alpha - x)e^x$, l'equazione data equivale a $f_\alpha(x) = 1$. Studiamo quindi la funzione $f_\alpha(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha che $f_\alpha(x)$ è definita e derivabile in tutto \mathbb{R} . Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\alpha(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = -\infty$$

Inoltre $f'_\alpha(x) = (\alpha - 1 - x)e^x$ e dunque $f'(x) > 0$ per ogni $x < \alpha - 1$, $f'(x) < 0$ per ogni $x > \alpha - 1$ e $f'(\alpha - 1) = 0$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, \alpha - 1)$, è strettamente decrescente in $(\alpha - 1, +\infty)$ e che $x = \alpha - 1$ è punto di massimo assoluto con $f_\alpha(\alpha - 1) = e^{\alpha-1}$. In particolare, si ha che $f_\alpha(x) \leq e^{\alpha-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ da cui si deduce immediatamente che l'equazione $f_\alpha(x) = 1$ non ammette soluzioni se $e^{\alpha-1} < 1$ ovvero se $\alpha < 1$.

Da quanto sopra e dal teorema dei valori intermedi segue che l'equazione $f_\alpha(x) = 1$ ammette una sola soluzione se $e^{\alpha-1} = 1$ ovvero se $\alpha = 1$ mentre ammette due soluzioni (la prima in $(-\infty, \alpha - 1)$, la seconda in $(\alpha - 1, +\infty)$) se $e^{\alpha-1} > 1$ ovvero se $\alpha > 1$.

(3) La risposta esatta è **b**. È sufficiente osservare che essendo la funzione arcotangente limitata con $-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, risulta

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) = \arctan \frac{x}{x-1} < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Dunque la funzione data è limitata.

In alternativa, si poteva osservare che la funzione data è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Quindi la funzione non ammette asintoti obliqui ma bensì un asintoto orizzontale a $\pm\infty$, $y = \frac{\pi}{4}$. Riguardo alla monotonia osserviamo che la funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2 + x^2} < 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ne segue che la funzione risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Dai limiti sopra si ottiene allora che $\frac{\pi}{4} > f(x) > -\frac{\pi}{2}$ per $x \in (-\infty, 1)$ mentre $\frac{\pi}{2} > f(x) > \frac{\pi}{4}$ per $x \in (1, +\infty)$. Dunque la funzione è limitata nel suo dominio.

(4) La risposta esatta è la a. Infatti, scrivendo $f(x) = e^{\frac{\log|x|}{x}}$ per $x \neq 0$, ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\log|x|}{x} = \mp\infty$$

si ottiene che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ mentre $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$. Quindi che la funzione data non è continua in 0.

(5) La risposta esatta è la c. Infatti, operando la sostituzione $t = x^2$ (e quindi $dt = 2xdx$) ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 e^{x^2} 2xdx = \frac{1}{2} \int t e^t dt = \frac{1}{2} (t e^t - \int e^t dt) \\ &= \frac{1}{2} (t e^t - e^t) + c = \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \end{aligned}$$

Allora

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [x^2 e^{x^2} - e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(6) La risposta esatta è la a. Infatti, per $x \rightarrow 0$ si ha $1 - \cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}$ e dunque che

$$\frac{1 - \cos x^2}{x^\alpha} \sim \frac{1}{2x^{\alpha-4}}$$

Poichè l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-4}} dx$ converge se e solo se $\alpha - 4 < 1$ ovvero se e solo se $\alpha < 5$, dal criterio del confronto asintotico si ottiene che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 5$.

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 23/03/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\sqrt{|e^x - 1|} \leq 1$.

1) La successione $a_n = \frac{\log(1 + e^n) - n}{\sin \frac{1}{n^\alpha}}$

- a) converge a 0 per ogni $\alpha > 0$
 c) diverge a $+\infty$ per ogni $0 < \alpha < 1$

- b) diverge a $-\infty$ per ogni $0 < \alpha < 1$
 d) nessuna delle precedenti

2) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x^2} - \frac{1}{|x|}$

- a) esiste e vale $-\frac{1}{2}$
 c) esiste e vale $-\infty$

- b) non esiste
 d) nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^{2x} - xe^x = \alpha$

- a) ammette 2 soluzioni per ogni $0 < \alpha < e$
 c) ammette 2 soluzioni per ogni $\alpha > 1$

- b) ammette una sola soluzione $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
 d) nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \sin^2 x$, nel punto 0

- a) è derivabile con $f'(0) = 1$
 c) è derivabile con $f'(0) = 0$

- b) non è derivabile
 d) nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\int_0^1 \log^2 x \, dx$

- a) converge e vale 1
 c) converge e vale 2

- b) non converge
 d) nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^\alpha}} \, dx$

- a) converge se e solo se $\alpha < 2$
 c) converge se e solo se $\alpha > 2$

- b) diverge per ogni $\alpha > 0$
 d) nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

Domanda filtro: $x \leq \log 2$

(1) La risposta esatta è la **[a]**. Si osservi che, dai limiti notevoli, per $n \rightarrow +\infty$ risulta

$$\log(1 + e^n) - n = n + \log\left(\frac{1}{e^n} + 1\right) - n = \log\left(\frac{1}{e^n} + 1\right) \sim \frac{1}{e^n}$$

mentre, per $\alpha > 0$, si ha

$$\sin \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

Allora, per ogni $\alpha > 0$, per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha}{e^n}$$

e dunque $a_n \rightarrow 0$.

(2) La risposta esatta è la **[b]**. Infatti, ricordando che

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

per $x \rightarrow 0^+$ si ottiene

$$\frac{\log(1 + x)}{x^2} - \frac{1}{|x|} = \frac{\log(1 + x) - x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

mentre per $x \rightarrow 0^-$ si ha

$$\frac{\log(1 + x)}{x^2} - \frac{1}{|x|} = \frac{\log(1 + x) + x}{x^2} = \frac{x + o(x) + x}{x^2} \rightarrow -\infty.$$

Quindi il limite dato non esiste.

(3) La risposta esatta è **[d]**. Posto $f(x) = e^{2x} - xe^x$, l'equazione data è equivalente a $f(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo quindi la funzione $f(x)$. Si ha innanzitutto che $f(x)$ è definita e continua in tutto \mathbb{R} con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Osserviamo poi che la funzione è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x(2e^x - x - 1)$. Essendo $e^x \geq x + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($y = 1 + x$ è retta di supporto in 0 della funzione e^x , convessa in \mathbb{R}), si ottiene che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in \mathbb{R} e dunque che $f(x)$ è funzione iniettiva.

Dal Teorema dei valori intermedi si deduce che l'equazione data ammette una sola soluzione per $\alpha > 0$ mentre non ammette soluzioni per $\alpha \leq 0$.

(4) La risposta esatta è la **[c]**. Infatti, ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, si ottiene che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h|} \sin^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sqrt{|h|} \frac{\sin^2 h}{h^2} = 0$$

e dunque che $f(x)$ è derivabile in 0 con $f'(0) = 0$.

(5) La risposta esatta è la \boxed{c} . L'integrale improprio si può calcolare mediante la definizione

$$\int_0^1 \log^2 x dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \log^2 x dx$$

Osservato che, integrando per parti due volte,

$$\int \log^2 x dx = x \log^2 x - 2 \int \log x dx = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c$$

si ottiene

$$\int_0^1 \log^2 x dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [x \log^2 x - 2x \log x + 2x]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2 - a \log^2 a + 2a \log a - 2a = 2$$

essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

(6) La risposta esatta è la \boxed{c} . Analizziamo separatamente il comportamento di $f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^\alpha}}$ per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^\alpha}} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico otteniamo allora che se $\alpha \geq 1$, $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge.

Se $\alpha < 1$, essendo $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^\alpha}}$ convergente, sempre dal criterio del confronto asintotico, deduciamo che $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge. Da quanto sopra si ottiene che $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^\alpha}} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico otteniamo allora che se $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ diverge.

Inoltre osservato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^\alpha}}$ converge se e solo se $\alpha > 2$, ne deduciamo che

$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) dx$ converge se e solo se $\alpha > 2$.

Riunendo i risultati sopra, otteniamo che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > 2$.

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 11/04/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right) > \pi/4$.

1) La successione $a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^4 + n^3 - n^2}}$,

a converge a 0 se $\alpha > 1$

c diverge a $+\infty$ se $\alpha < 1$

b converge a $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$

d nessuna delle precedenti

2) L'equazione $\arctan x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \alpha$ ammette due soluzioni

a per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

c per ogni $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - 1$

b per ogni $|\alpha| > 1$

d nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\log(1+|x|)} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ nel punto $x = 0$

a non è continua

c è continua ma non è derivabile

b è derivabile

d nessuna delle precedenti

4) Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$ tale che $F(-1) = 0$.
Il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

a non esiste

c è finito

b è infinito

d nessuna delle precedenti

5) La funzione $f(x) = xe^{1/x} - x - 1$ per $x \rightarrow -\infty$

a non è un infinitesimo

c è un infinitesimo di ordine 1

b è un infinitesimo di ordine 2

d nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{2 + \sqrt{x} - x} dx$ vale

a $\sqrt{2} - 1$

c $\pi/2$

b $\log \sqrt[3]{4}$

d nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

Domanda filtro: $-1 < x < 1, x \neq 0$

(1) La risposta esatta è la d. Si osservi che, dai limiti notevoli, per $n \rightarrow +\infty$ risulta

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^4 + n^3} - n^2} = \frac{n^{\alpha-2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1} \sim \frac{n^{\alpha-2}}{\frac{1}{2n}} = 2n^{\alpha-1}$$

e quindi

$$a_n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

(2) La risposta esatta è la c. Posto $f(x) = \arctan x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, l'equazione data è equivalente a $f(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo quindi la funzione $f(x)$. Si ha innanzitutto che $f(x)$ è definita e continua in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = -\frac{\pi}{2} + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = \frac{\pi}{2} - 1$$

mentre $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp \infty$. Osserviamo poi che la funzione è derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

Essendo somma di termini positivi, si ottiene che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(Si noti che lo studio sopra si poteva semplificare osservando che $f(x)$ è funzione dispari).

Dal Teorema dei valori intermedi si deduce che l'equazione data ammette soluzione in $(-\infty, 0)$ se e solo se $\alpha > -\frac{\pi}{2} + 1$ e tale soluzione è unica. Analogamente, l'equazione ammette soluzione in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha < \frac{\pi}{2} - 1$ e tale soluzione è unica. Ne concludiamo che l'equazione ammette due soluzioni se e solo se $-\frac{\pi}{2} + 1 < \alpha < \frac{\pi}{2} - 1$ ovvero $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - 1$.

(3) La risposta esatta è a. Infatti, ricordando che per $y \rightarrow 0$, $\log(1+y) \sim y$ mentre $\sin y \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(2x)}{\log(1+|x|)} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2x}{|x|} = \pm 2$$

Quindi la funzione data non risulta continua in 0.

(4) La risposta esatta è la **[b]**. Infatti, per definizione risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^{-\infty} f(t) dt.$$

Essendo $f(x)$ infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow -\infty$, dal criterio del confronto asintotico si deduce che l'integrale improprio diverge ovvero che il limite dato è infinito.

In alternativa si poteva calcolare direttamente la primitiva, utilizzando il metodo di integrazione delle funzioni razionali, ottenendo

$$F(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x + 1)$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$.

(5) La risposta esatta è la **[c]**. Ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \rightarrow 0$, per $x \rightarrow -\infty$ si ottiene

$$f(x) = x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - x - 1 = \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

e quindi che $f(x)$ è infinitesimo di ordine 1.

(6) La risposta esatta è la **[b]**. Operando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$ e $dx = 2t dt$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2 + \sqrt{x} - x} dx &= -2 \int_0^1 \frac{t}{t^2 - t - 2} dt = -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t-2} dt \\ &= -\frac{2}{3} [\log |t+1| + 2 \log |t-2|]_0^1 = \frac{2}{3} \log 2 = \log \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 29/06/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\frac{|x|}{1-x} > 1$.

1) La successione $a_n = \frac{(2n)!}{2^{n^2}}$,

- a) converge a 0
 c) converge a 1

- b) diverge a $+\infty$
 d) nessuna delle precedenti

2) L'equazione $e^{1/x} = \alpha\sqrt{x+1}$ ammette

- a) una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$
 c) due soluzioni per ogni $\alpha > 0$

- b) due soluzioni se e solo se $\alpha \geq 1/e$
 d) nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \log(\cos x) - \sin(\sqrt{1+x^2} - 1)$, per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo

- a) di ordine 1
 c) di ordine 2

- b) di ordine superiore a 2
 d) nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - 2 \arcsin(1-x)}{x^\alpha} & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, risulta continua nel punto $x = 0$ se e solo se

- a) $\alpha < \frac{1}{2}$
 c) $\alpha < 1$

- b) $\alpha \leq 0$
 d) nessuna delle precedenti

5) La funzione $f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

- a) è pari
 c) ammette massimo e minimo

- b) è convessa
 d) nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\int_0^1 x^2 \log^2 x dx$

- a) diverge
 c) converge e vale $\frac{4}{9}$

- b) converge e vale $\frac{2}{9}$
 d) nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

Domanda filtro: $\frac{1}{2} < x < 1$

(1) La risposta esatta è la a. Infatti per $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^{2n+1}} \sim \frac{4n^2}{2^{2n}} \rightarrow 0$$

e dal criterio del rapporto si conclude che $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

(2) La risposta esatta è la c. Posto $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+1}}$ ed osservato che $x = -1$ non è soluzione dell'equazione per alcun $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che l'equazione data è equivalente a $f(x) = \alpha$. Studiamo quindi la funzione $f(x)$. Si ha innanzitutto che $f(x)$ è definita e continua in $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ con

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Osserviamo poi che la funzione è derivabile in ogni $x \in D$ con

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2 + 2x + 2)}{2x^2(x+1)^{\frac{3}{2}}} < 0 \quad \forall x \in D$$

Ne segue che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Dal Teorema dei valori intermedi si deduce che l'equazione data ammette soluzione in $(-1, 0)$ se e solo se $\alpha > 0$ e tale soluzione è unica. Analogamente, l'equazione ammette soluzione in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$ e tale soluzione è unica. Ne concludiamo che l'equazione ammette due soluzioni per ogni $\alpha > 0$.

(3) La risposta esatta è c. Infatti, ricordando che per $y \rightarrow 0$, $\log(1+y) = y + o(y)$, per $x \rightarrow 0$ si ha $\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)) = \cos x - 1 + o(\cos x - 1)$. Essendo inoltre $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si ottiene $\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

D'altra parte, ricordando che per $y \rightarrow 0$, $\sin y = y + o(y)$, per $x \rightarrow 0$ si ha $\sin(\sqrt{1+x^2} - 1) = \sqrt{1+x^2} - 1 + o(\sqrt{1+x^2} - 1)$ ed essendo $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, risulta $\sin(\sqrt{1+x^2} - 1) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Quindi $f(x) = -x^2 + o(x^2)$ e $\text{ord}(f(x)) = 2$.

(4) La risposta esatta è la a. Occorre determinare per quali valori di α risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi - 2 \arcsin(1-x)}{x^\alpha} = 0.$$

Il limite è banalmente verificato nel caso in cui $\alpha \leq 0$ mentre per $\alpha > 0$ è applicabile il Teorema di de L'Hopital e si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi - 2 \arcsin(1-x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{2}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1} \sqrt{2x-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

e tale limite risulta nullo se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

(5) La risposta esatta è la **[d]**. **[a]** è falsa, infatti essendo la funzione integranda pari, la funzione integrale risulta dispari: operando la sostituzione $t = -s$ si ottiene

$$f(-x) = \int_0^{-x} t^2 e^{-t^2} dt = - \int_0^x s^2 e^{-s^2} ds = -f(x).$$

[c] è falsa, infatti per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $f(x)$ è derivabile con $f'(x) = x^2 e^{-x^2} \geq 0$ per ogni x . Dunque $f(x)$ risulta sempre crescente. Anche **[b]** è falsa in quanto $f''(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Quindi $f(x)$ risulta convessa in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e concava in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

(6) La risposta esatta è la **[d]**. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int x^2 \log^2 x dx &= \frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \log x dx = \frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{9} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 + c \end{aligned}$$

e ricordando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$ per ogni $\alpha > 0$, si conclude che

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \log^2 x dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^2 \log^2 x dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 \right]_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2}{27} - \frac{1}{3} a^3 \log^2 a + \frac{2}{9} a^3 \log a - \frac{2}{27} a^3 = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 13/07/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\sqrt{1 - \log(1 - x)} < \log x$.

1) La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^n$,

- a converge a 0
 c diverge a $+\infty$

- b converge a e
 d nessuna delle precedenti

2) L'equazione $x(|x| + \alpha) + 1 = 0$ ammette due soluzioni

- a per $\alpha > 0$
 c per $\alpha < 1$

- b per $\alpha \leq -2$
 d nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

- a è iniettiva
 c è limitata

- b ha immagine $(-\infty, \frac{1}{2}]$
 d nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \cos(\sin x) - \sqrt{1 - x^2}$ per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine

- a 1
 c 2

- b maggiore di 2
 d nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha [\arcsin(1 - \frac{1}{x}) - \pi/2] dx$

- a converge per ogni $\alpha < 1$
 c converge per ogni $\alpha > 2$

- b non converge per alcun $\alpha > 0$
 d nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$ vale

- a $\frac{1}{2}(1 - \log 2)$
 c $\frac{1}{2}(1 - \log \sqrt{2})$

- b $\frac{1}{2}(\log \sqrt{2} - 1)$
 d nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

Domanda filtro: nessuna soluzione

(1) La risposta esatta è la d. Osservato che

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^n = e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n})} - e^n = e^n (e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - n} - 1),$$

iniziamo a determinare il comportamento della successione $n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - n$. A tale scopo, ricordando che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, posto $x = \frac{1}{n}$, per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - n = n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Ne segue che $n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - n \rightarrow -\frac{1}{2}$ e dunque che $e^{n^2 \log(1 + \frac{1}{n}) - n} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Essendo $e^n \rightarrow +\infty$ e $\frac{1}{\sqrt{e}} < 1$, ne concludiamo che $a_n \rightarrow -\infty$.

(2) La risposta esatta è la b. Per $x \geq 0$, l'equazione si riduce all'equazione di secondo grado $x^2 + \alpha x + 1 = 0$. Tale equazione ammette soluzione se e solo se $\Delta = \alpha^2 - 4 \geq 0$ ovvero se e solo se $|\alpha| \geq 2$. In tal caso le soluzioni sono date da

$$x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Se $\alpha \geq 2$ allora sia x_1 che x_2 risultano negative e quindi non accettabili. Se invece $\alpha \leq -2$ entrambe le soluzioni risultano positive e dunque accettabili. Tali soluzioni sono distinte se $\alpha < -2$, coincidenti se $\alpha = -2$.

Analogamente, per $x < 0$, l'equazione si riduce all'equazione di secondo grado $-x^2 + \alpha x + 1 = 0$. In questo caso $\Delta = \alpha^2 + 4 > 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e quindi l'equazione ammette sempre le due soluzioni distinte

$$x_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione x_1 risulta negativa, e quindi accettabile, mentre x_2 risulta positiva e quindi non accettabile.

Riunendo quanto sopra si ottiene che l'equazione data ammette tre soluzioni se $\alpha < -2$, due soluzioni se $\alpha = -2$ ed una sola soluzione per tutti gli altri valori di α .

In alternativa, si poteva studiare la funzione $f_\alpha(x) = x(|x| + \alpha) + 1$ determinandone il numero degli zeri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ oppure, osservato che l'equazione data è equivalente all'equazione $|x| + \alpha + \frac{1}{x} = 0$, si poteva studiare la funzione $g_\alpha(x) = |x| + \frac{1}{x}$.

(3) La risposta esatta è d. La funzione risulta definita in tutto \mathbb{R} con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Quindi $f(x)$ non è limitata.

La funzione risulta derivabile in \mathbb{R} con $f'(x) = e^{-x}(2e^{-x} - 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \log 2$ e dunque $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, \log 2)$, strettamente decrescente in $(\log 2, +\infty)$ e $x_0 = \log 2$ risulta un punto di massimo assoluto con $f(\log 2) = \frac{1}{4}$.

Ne segue che $f(x)$ non è iniettiva e che ha immagine $(-\infty, \frac{1}{4}]$.

(4) La risposta esatta è la **[b]**. Dagli sviluppi notevoli per $x \rightarrow 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x + o(\sin^2 x) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) \\ &= -\frac{1}{2}(x + o(x))^2 + o((x + o(x))^2) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= -xo(x) + o(x^2) = o(x^2) \end{aligned}$$

e quindi che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo maggiore di 2.

(5) La risposta esatta è la **[b]**. Infatti, osservato che $\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - y) \sim \sqrt{2y}$ per $y \rightarrow 0^+$ (si veda risoluzione prova del 29/06/05), per $x \rightarrow +\infty$ risulta

$$x^\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right) \sim \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

Ne segue che l'integrale dato converge se e solo se $\frac{1}{2} - \alpha > 1$ ovvero se e solo se $\alpha < -\frac{1}{2}$. In particolare l'integrale non converge per alcun $\alpha > 0$.

(6) La risposta esatta è la **[a]**. Ricordando che $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (\tan^2 x + 1) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \\ &= \frac{1}{2} [\tan^2 x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\log |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \log \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(1 - \log 2) \end{aligned}$$

In alternativa, operando la sostituzione $t = \tan x$ (e quindi $dx = \frac{dt}{1+t^2}$), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx &= \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} ([t^2]_0^1 - [\log(1+t^2)]_0^1) = \frac{1}{2}(1 - \log 2) \end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 08/09/2005

Domanda filtro. Risolvere la disequazione $\sqrt{x-1} < \frac{x}{2}$.

1) La successione $a_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{1 - \cos(n^\alpha)}$ con $\alpha > 0$,

a) è indeterminata per ogni $\alpha > 0$

b) converge se e solo se $\alpha < 1$

c) converge ad 1 per ogni $\alpha > 0$

d) nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, nel punto $x = 0$

a) è derivabile per ogni $\alpha > 0$

b) non è continua per alcun $\alpha > 0$

c) è continua ma non derivabile per ogni $\alpha > 1$

d) nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \tan x - (\arctan x)(\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1)$ per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine

a) $\frac{3}{2}$

b) maggiore di 2

c) 1

d) nessuna delle precedenti

4) L'equazione $\arctan e^x = x$ ammette

a) una sola soluzione positiva

b) due soluzioni discordi

c) una sola soluzione negativa

d) nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x \, dx$ vale

a) 0

b) 2π

c) 1

d) -2π

6) L'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} \, dx$

a) converge per $1 < \alpha < 2$

b) converge per $\frac{3}{2} < \alpha < 3$

c) converge per $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$

d) nessuna delle precedenti

SOLUZIONE

Domanda filtro: $x \geq 1, x \neq 2$

(1) La risposta esatta è la **[c]**. Infatti si osservi innanzitutto che

$$a_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{1 - \cos(n^\alpha)} = e^{(1 - \cos(n^\alpha)) \log(1 + \sin \frac{1}{n})}$$

e che la successione $\log(1 + \sin \frac{1}{n})$ è infinitesima per $n \rightarrow +\infty$ mentre la successione $1 - \cos(n^\alpha)$ è limitata per ogni $\alpha > 0$. Allora, per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene $(1 - \cos(n^\alpha)) \log(1 + \sin \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ e quindi $a_n \rightarrow 1$ per ogni $\alpha > 0$.

(2) La risposta esatta è la **[d]**. Infatti, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0 \iff \alpha > 0$$

mentre

$$\text{esiste finito il limite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \iff \alpha > 1$$

Ne segue che la funzione data è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 0$ mentre è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 1$.

(3) La risposta esatta è **[c]**. Infatti, dai limiti notevoli per $x \rightarrow 0$ si ottiene

$$f(x) = x + o(x) - (x + o(x))\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x})\right) = x + o(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}}) = x + o(x),$$

essendo $x^{\frac{3}{2}} = o(x)$. Ne segue che $\text{ord}(f(x)) = 1$ per $x \rightarrow 0$.

(4) La risposta esatta è la **[a]**. Consideriamo la funzione $f(x) = \arctan e^x - x$ e cerchiamone gli zeri. Tale funzione risulta definita e derivabile in tutto \mathbb{R} e poichè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, dal Teorema di esistenza degli zeri possiamo affermare che la funzione ammette almeno uno zero. Essendo poi

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - 1 = -\frac{e^{2x} - e^x + 1}{1 + e^{2x}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

otteniamo che la funzione è strettamente decrescente in \mathbb{R} e dunque che ammette uno ed un solo zero. Essendo infine $f(0) = \frac{\pi}{4} > 0$, possiamo concludere che tale zero è positivo.

(5) La risposta esatta è la **[d]**. Infatti, operando la sostituzione $t = \log x$ (e quindi $dt = \frac{dx}{x}$) ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x \, dx &= \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, dt \\ &= [-t \cos t + \sin t]_0^{2\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la **b**. Infatti, per $x \rightarrow 1$ risulta $\log x = \log(1+(x-1)) \sim (x-1)$ e quindi

$$\frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} \sim \frac{(x-1)^2}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^{\alpha-2}}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue allora che l'integrale $\int_1^e \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} dx$ converge se e solo se $\alpha - 2 < 1$ ovvero $\alpha < 3$.

Per $x \rightarrow +\infty$, osserviamo innanzitutto che per ogni $x > e$ si ha

$$\frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} > \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

e quindi, dal criterio del confronto si ottiene che $\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} dx$ diverge se $\alpha - \frac{1}{2} \leq 1$ ovvero se $\alpha \leq \frac{3}{2}$. Se $\alpha > \frac{3}{2}$, ricordando che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\beta} = 0$ se $\beta > 0$, per ogni $\lambda < \alpha - \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x}{x^{\alpha-\lambda-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Scelto allora $\lambda \in (1, \alpha - \frac{1}{2})$, possibile essendo $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, il criterio del confronto asintotico ci permette di concludere che l'integrale $\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} dx$ converge.

Riunendo quanto ottenuto, si ha che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} dx = \int_1^e \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} dx + \int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{(x-1)^\alpha} dx$$

converge se e solo se $\frac{3}{2} < \alpha < 3$.

ANALISI MATEMATICA 1
SECONDA PROVA SCRITTA DEL 05/10/2005

Domanda filtro. Risolvere la disequazione $\sqrt{|x|} - 1 > x$.

1) La successione $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{n + n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) diverge per ogni $\alpha > 0$ | <input type="checkbox"/> b) converge a 0 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ |
| <input type="checkbox"/> c) converge ad 1 per $\alpha = 1$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

2) La funzione $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ con $\alpha \geq 0$ nel punto $x = 0$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) è derivabile per ogni $\alpha > 0$ | <input type="checkbox"/> b) non è continua per alcun $\alpha \geq 0$ |
| <input type="checkbox"/> c) è continua ma non derivabile per ogni $\alpha \geq 0$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

3) La funzione $f(x) = \arcsin(1-x) - \arctan \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0^+$ è un infinitesimo di ordine

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) 1 | <input type="checkbox"/> b) maggiore di 1 |
| <input type="checkbox"/> c) minore di 1 | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

4) L'equazione $x^\alpha |\log x| = 1$ con $\alpha > 0$ ammette

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$ | <input type="checkbox"/> b) tre soluzioni per ogni $\alpha \geq e$ |
| <input type="checkbox"/> c) due soluzioni per ogni $\alpha > 1$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

5) L'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x} dx$ vale

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) $\frac{\pi}{4}$ | <input type="checkbox"/> b) $\frac{\pi}{4} - \log 2$ |
| <input type="checkbox"/> c) π | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

6) L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) dx$ converge

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) per $\alpha < 3$ | <input type="checkbox"/> b) per $\alpha \leq 3$ |
| <input type="checkbox"/> c) per $2 < \alpha$ | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

SOLUZIONE

Domanda filtro: $x \leq -1$

(1) La risposta esatta è la b. Infatti si osservi che per $n \rightarrow +\infty$ risulta

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{2n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \rightarrow 1$$

e dunque che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{n + n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + n^\alpha} = 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) La risposta esatta è la a. Infatti, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \frac{\sin x}{x} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$.

(3) La risposta esatta è c. Infatti, dal teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x)}{x^b} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{bx^{b-1}} = \frac{1}{b} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{b-1} \sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2b}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{b-\frac{1}{2}}}$$

e tale limite risulta finito e non nullo se e solo se $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi otteniamo che per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x) \sim \sqrt{2x}$$

ovvero $\arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$. Essendo poi $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ per ogni $x > 0$, per $x \rightarrow 0^+$ otteniamo che $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - x + o(x)$. Allora

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} + x + o(x) = -\sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$$

essendo $x = o(\sqrt{x})$. Ne segue che $ord(f(x)) = \frac{1}{2}$ per $x \rightarrow 0$.

(4) La risposta esatta è la d. Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha |\log x|$ ed osserviamo che l'equazione data è equivalente all'equazione $f(x) = 1$.

$f(x)$ risulta definita e continua in $(0, +\infty)$ e derivabile in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Risulta

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \log x + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(\alpha \log x + 1) & \text{se } x > 1 \\ -\alpha x^{\alpha-1} \log x - x^{\alpha-1} = -x^{\alpha-1}(\alpha \log x + 1) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Otteniamo allora che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 1$ e dunque che la funzione è strettamente crescente in $(1, +\infty)$. Essendo $f(1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, dal Teorema dei valori intermedi otteniamo che l'equazione $f(x) = 1$ ammette una ed una sola soluzione in $(1, +\infty)$.

Inoltre, per $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x < -\frac{1}{\alpha}$ ovvero se e solo se $x < e^{-\frac{1}{\alpha}}$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in $(0, e^{-\frac{1}{\alpha}})$ e strettamente decrescente in $(e^{-\frac{1}{\alpha}}, 1)$. Quindi $x = e^{-\frac{1}{\alpha}}$ è punto di massimo relativo con $f(e^{-\frac{1}{\alpha}}) = \frac{1}{\alpha e}$ mentre $x = 1$ è punto di minimo assoluto con $f(1) = 0$.

Otteniamo allora che l'equazione $f(x) = 1$ non ammette soluzioni in $(0, 1)$ se $\frac{1}{\alpha e} < 1$ ovvero se $\alpha > \frac{1}{e}$; ammette una sola soluzione se $\alpha = \frac{1}{e}$ e due soluzioni se $\alpha < \frac{1}{e}$.

Riunendo i risultati ottenuti si ha che l'equazione data ammette :

- tre soluzioni se $\alpha < \frac{1}{e}$;
- due soluzioni se $\alpha = \frac{1}{e}$;
- una soluzione se $\alpha > \frac{1}{e}$.

(5) La risposta esatta è la d. Infatti, operando la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ (e quindi $dt = -\frac{dx}{x^2}$) ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x} dx &= - \int \arctan t dt = -t \arctan t + \int \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= -t \arctan t + \frac{1}{2} \log(1+t^2) + c \\ &= -\frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{b} \arctan \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2.$$

(6) La risposta esatta è la a. Infatti, per $x \rightarrow 0$ risulta $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e quindi

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = \frac{\sin x - x}{x} = \frac{1}{x} \left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{6}$$

Otteniamo allora che

$$\frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \sim -\frac{1}{6x^{\alpha-2}}$$

e quindi, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 3$.