Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 13 gennaio 2014

(1) Fornire la definizione di integrale improprio per funzioni continue in un intervallo limitato $(a, b]$. Enunciare il criterio del confronto e del confronto asintotico per tale integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per serie a termini positivi.

(3) Enunciare e provare la regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

(4) Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ tale che $\inf \mathcal{A} = 0$ e $\sup \mathcal{A} = 1$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $0 \in \mathcal{A}$.

B. Esiste $a \in \mathcal{A}$ tale che $0 < a < \frac{1}{2}$.

C. Esiste $a \in \mathcal{A}$ tale che $a > \frac{1}{2}$.

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si consideri ad esempio l'insieme $\mathcal{A} = (0, 1]$ per cui risulta $\inf \mathcal{A} = 0$, $\sup \mathcal{A} = 1$ ma $0 \notin \mathcal{A}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio per l'insieme $A = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$ risulta $\inf \mathcal{A} = 0$, $\sup \mathcal{A} = 1$ ma non esiste alcun $a \in \mathcal{A}$ tale che $0 < a < \frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Dalla caratterizzazione di estremo superiore si ha che

$$1 = \sup \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \le 1 \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \\ \forall\, \varepsilon > 0 \text{ esiste } a \in \mathcal{A} \text{ tale che } a > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

Scelto $\varepsilon = \frac{1}{2}$ avremo allora che esiste $a \in \mathcal{A}$ tale che $a > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 3 febbraio 2014 – $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di funzione continua in un punto e la classificazione dei punti di discontinuità fornendo per ciascun caso un esempio.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di monotonia per funzioni derivabili.

(3) Provare che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ risulta convergente se e solo se $p < 1$.

(4) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi divergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \leq 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ con $a_n = \frac{1}{n}$. La serie risulta divergente ma $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Considerando sempre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ con $a_n = \frac{1}{n}$, si ha che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ risulta convergente.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Dalle ipotesi, la serie di potenze diverge per $x = 1$ e dunque, dal Teorema di Abel, non risulterà convergente in ogni $|x| > 1$. Dalla definizione di raggio di convergenza risulta allora che

$$\rho = \sup\{|x| \, / \, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge}\} \leq 1$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 3 febbraio 2014 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto e illustrarne l'interpretazione geometrica.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri.

(3) Provare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ risulta convergente se e solo se $p > 1$.

(4) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, a_n$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \geq 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ con $a_n = \frac{1}{n^2}$. La serie risulta convergente ma $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$, con $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$, risulta convergente mentre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ risulta divergente.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Dalle ipotesi, la serie di potenze converge per $x = 1$ e dunque, dalla definizione di raggio di convergenza, risulta che

$$\rho = \sup\{|x| \,/\, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge}\} \geq 1$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 24 febbraio 2014 – $\boxed{\text{A}}$

(1) Fornire la definizione di somma integrale superiore e inferiore, di integrale inferiore e superiore, di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann. Fornire un esempio di funzione limitata non integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Enunciare il Principio di Induzione ed utilizzarlo per provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \neq 1$ risulta

$$1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(4) Siano (a_n) e (b_n) due successioni asintotiche per $n \to +\infty$ e tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Per ogni (c_n), $a_n + c_n \sim b_n + c_n$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si considerino ad esempio le successioni $a_n = n^2 - n$ e $b_n = n^2+1$. Risulta $a_n \sim b_n$ ma scelta $c_n = 1-n^2$ si ha $a_n+c_n = 1-n \to -\infty$, $b_n + c_n = 2$ e dunque $a_n + c_n \not\sim b_n + c_n$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti dai limiti notevoli coinvolgenti le potenze risulta $x_n^\alpha \to x_0^\alpha$ per ogni successione $x_n \to x_0 > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Poichè $a_n \sim b_n$, si ha $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ e dunque $\frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^\alpha \to 1$, da cui $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Considerate nuovamente le successioni $a_n = n^2-n$ e $b_n = n^2+1$, risulta $a_n \sim b_n$, mentre $e^{a_n} \not\sim e^{b_n}$ in quanto

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n-b_n} = e^{-n-1} \to 0 \neq 1.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale

Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 24 febbraio 2014 – $\boxed{\text{B}}$

(1) Fornire la definizione di funzione convessa ed enunciare i noti criteri di convessità. Provare, utilizzando la definizione, che la funzione $f(x) = x^2$ è convessa nel suo dominio.

(2) Enunciare e dimostrare il Criterio di integrabilità.

(3) Enunciare il Principio di Induzione ed utilizzarlo per provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$ risulta

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(4) Siano (a_n) e (b_n) successioni positive, infinitesime e asintotiche per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Per ogni (c_n), $a_n - c_n \sim b_n - c_n$ per $n \to +\infty$.

B. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ${a_n}^\alpha \sim {b_n}^\alpha$ per $n \to +\infty$.

C. $\log a_n \sim \log b_n$ per $n \to +\infty$.

Soluzione

Per i quesiti **(1)**, **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si considerino ad esempio le successioni infinitesime $a_n = \frac{1+n^2}{n^3}$ e $b_n = \frac{n+n^2}{n^3}$, risulta $a_n \sim b_n$ ma scelta $c_n = \frac{1}{n}$ si ha $a_n - c_n = \frac{1}{n^3}$, $b_n - c_n = \frac{1}{n^2}$ e dunque $a_n - c_n \not\sim b_n - c_n$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, dai limiti notevoli coinvolgenti le potenze risulta $x_n^\alpha \to x_0^\alpha$ per ogni successione $x_n \to x_0 > 0$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Poichè $a_n \sim b_n$ si ha $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ e dunque $\frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^\alpha \to 1$, da cui $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Difatti, dalle proprietà del logaritmo risulta

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log \frac{a_n}{b_n} + \log b_n}{\log b_n} = \frac{\log \frac{a_n}{b_n}}{\log b_n} + 1 \to 1$$

poichè per ipotesi $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ e $b_n \to 0^+$ e dunque $\log \frac{a_n}{b_n} \to 0$ e $\log b_n \to -\infty$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 9 giugno 2014

(1) Fornire la definizione di serie convergente e divergente ed enunciare i criteri del confronto e del confronto asintotico per serie a termini non negativi.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di convessità per funzioni derivabili.

(3) Provare che se $f(x)$ è funzione continua in $(a,b]$ ed ammette limite finito per $x \to a^+$ allora l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.

(4) Siano (a_n) e (b_n) due successioni non negative tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ con $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \le b_n$ per ogni $n \ge n_0$.

B. $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$.

C. $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** e **(3)**[1] consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Dalla definizione di "o" piccolo, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e dunque, preso $\varepsilon = 1$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|\frac{a_n}{b_n}| < 1$ per ogni $n \geq n_0$. Essendo a_n e b_n non negative ne segue che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq n_0$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio si considerino le successioni $a_n = n$ e $b_n = n^2$. Risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ e $a_n = o(b_n)$ mentre $a_n - b_n = n - n^2 \to -\infty$ per $n \to +\infty$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Infatti, dalla definizione di "o" piccolo, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e dunque, dall'algebra dei limiti risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \left(\frac{a_n}{b_n} + 1\right) = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

[1]per provare **(3)**, dal criterio del confronto è sufficiente provare che $f(x)$ è limitata in $(a, b]$. A tale scopo si puó utilizzare la definizione di limite per provare che la funzione è limitata in $(a, a + \delta)$ per qualche $\delta > 0$ ed il Teorema di Weierstrass per provare che è limitata in $[a + \delta, b]$.
In alternativa, utilizzando il criterio del confronto asintotico, considerata la funzione costante $g(x) = 1$ per ogni $x \in [a, b]$, poichè $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, possiamo concludere che anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 09 luglio 2014

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto, di punto angoloso, di cuspide e di punto a tangente verticale, fornendo di ciascun caso un esempio.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno.

(3) Provare che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell + m$.

(4) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

B. Esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

C. Se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $[a, b]$ allora $G(b) = G(a)$.

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio, considerata la funzione $f(x) = \sin x$ continua in $[-\pi, \pi]$ risulta che $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$ [2] mentre $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti dal Teorema della media integrale, essendo $f(x)$ continua in $[a, b]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ e dunque, essendo $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, ne deduciamo che $f(x_0) = 0$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera. Infatti dalla Formula fondamentale del calcolo integrale, per ogni primitiva $G(x)$ di $f(x)$ in $[a, b]$ si ha che $\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a)$ e dunque, essendo $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, otteniamo che $G(b) = G(a)$.

[2] la funzione è una funzione dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 27 settembre 2014

(1) Fornire la definizione di funzione continua in un punto e la classificazione dei punti di discontinuità, fornendo di ciascun caso un esempio.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Provare che l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ risulta convergente se e solo se $p > 1$.

(4) Siano (a_n) e (b_n), (c_n) tre successioni reali tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Se (a_n) e (c_n) sono regolari allora (b_n) è regolare.

B. Se (a_n) e (c_n) sono limitate allora (b_n) è limitata.

C. Se (a_n) e (c_n) sono convergenti allora (e^{b_n}) è convergente.

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** e **(3)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio, considerate le successioni $a_n = -1$, $b_n = (-1)^n$ e $c_n = 1$, risulta $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, (a_n) e (c_n) risultano successioni regolari mentre (b_n) non ammette limite.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Essendo (a_n) e (c_n) limitate avremo che esistono due costanti $M, L > 0$ tali che $-M \leq a_n \leq M$ e $-L \leq c_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue quindi che $-M \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque che la successione (b_n) risulta limitata.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Considerate nuovamente le successioni $a_n = -1$, $b_n = (-1)^n$ e $c_n = 1$, risulta $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, (a_n) e (c_n) risultano successioni convergenti mentre la successione $e^{b_n} = e^{(-1)^n} = \begin{cases} e & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{e} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ non ammette limite.