Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 18 gennaio 2014

1)* La successione $a_n = 3^n \left(\log(1 + \frac{\alpha}{2^n}) - \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} \right)$ risulta infinitesima per $n \to +\infty$

a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
b per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
c solo per $\alpha = 1$
d nessuna delle precedenti

2) L'equazione $e^{x+2} = \alpha x$ ammette soluzione

a per ogni $\alpha > 0$
b per nessun $\alpha < e^4$
c solo per $\alpha \geq e^3$
d nessuna delle precedenti

3)* La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2 x - \sqrt{1+\alpha x^2}}{x^3} & \text{se } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

a è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
b è derivabile solo per $\alpha = -1$ e $\beta = \frac{1}{6}$
c è derivabile per ogni $\alpha = -2$ e $\beta \in \mathbb{R}$
d nessuna delle precedenti

4) L'integrale $\displaystyle\int_0^2 |x-1| \log(1+x)\, dx$ vale

a $4\log 2 - \frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{2}$
b $\frac{1}{2}\log 3 - 3\log 2 + 1$
c $2 - \frac{3}{2}\log 3$
d nessuna delle precedenti

5) L'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n} \log n}$ è

a $[-2, 2]$
b $[-2, 2)$
c $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
d nessuna delle precedenti

Risposte*

1. $\boxed{\text{c}}$ Per $n \to +\infty$ risulta $a_n \sim \begin{cases} (\alpha-1)(\frac{3}{2})^n, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ -\frac{3}{2}(\frac{3}{4})^n, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$

Si osservi che lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione $\log(1+\alpha x) - \frac{\sin x}{1-x}$ per $x \to 0$ è

$$\begin{aligned} \log(1+\alpha x) - \frac{\sin x}{1-x} &= \alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - (x + o(x^2))(1 + x + o(x)) \\ &= (\alpha-1)x - (\frac{\alpha^2}{2} + 1)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

e dunque, ponendo $x = \frac{1}{2^n}$, per $n \to +\infty$ si ha

$$\log(1 + \frac{\alpha}{2^n}) - \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} \sim \begin{cases} \frac{\alpha-1}{2^n}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ -\frac{3}{2}\frac{1}{(2^n)^2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{4^n}, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

2. $\boxed{\text{d}}$ L'equazione ammette due soluzioni per ogni $\alpha > e^3$, una soluzione per $\alpha = e^3$ e $\alpha < 0$, nessuna per $0 \leq \alpha < e^3$.

3. $\boxed{\text{d}}$ La funzione risulta continua solo per $\alpha = -2$ e ogni $\beta \in I\!R$, risulta derivabile solo per $\alpha = -2$ e $\beta = \frac{5}{6}$.

Si osservi che lo sviluppo di ordine 4 di $\cos^2 x$ per $x \to 0$ è

$$\cos^2 x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

e dunque

$$\cos^2 x - \sqrt{1+\alpha x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - (1 + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^4 + o(x^4)) = -(1+\frac{\alpha}{2})x^2 + (\frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{8})x^4 + o(x^4)$$

4. $\boxed{\text{a}}$ Una primitiva della funzione $f(x) = (x-1)\log(1+x)$ è data da $F(x) = \frac{1}{2}((x-1)^2\log(1+x) - \frac{x^2}{2} + 3x - 4\log(1+x))$. Ne segue che

$$\int_0^2 |x-1|\log(1+x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = F(2) - 2F(1) + F(0) = 4\log 2 - \frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{2}.$$

5. $\boxed{\text{b}}$ Il raggio di convergenza della serie è $\rho = 2$, la serie converge per il criterio di Leibniz in $x = -2$ ma dal criterio del confronto asintotico, la serie diverge in $x = 2$.

* Solo le risposte di cui e' presente lo svolgimento sono ritenute valide per Êla valutazione del compito.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 8 febbraio 2014

1) La funzione $f(x) = \sqrt{\cosh(\alpha x)} - \cos^2 x$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ 2 solo per $\alpha = 2$
$\boxed{\text{c}}$ 4 per qualche $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2)* L'equazione $2e^{4x} - e^x + k = 0$ ammette due soluzioni

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $k \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ solo per $k < 0$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $0 < k < \frac{3}{8}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) Una lattina senza coperchio deve avere un volume pari a $4\pi\, cm^3$. Il raggio di base della lattina di superficie minima è:

$\boxed{\text{a}}$ 2
$\boxed{\text{b}}$ π
$\boxed{\text{c}}$ 1
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sinh x}{e^x - 1}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $+\infty$
$\boxed{\text{b}}$ $1 - \frac{1}{2e}$
$\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{6}(4 - \frac{1}{e^3})$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5)* La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt[3]{n^2 - n + 1} - \sqrt[3]{n^2 - \alpha n})$ con $\alpha \in I\!R$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per nessun $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ solo se $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

RISPOSTE*

1. $\boxed{\text{a}}$ Risulta infatti $f(x) = (\frac{\alpha^2}{4} + 1)x^2 + o(x^2)$ e dunque $\text{ord}(f(x)) = 2$ per ogni $\alpha \in I\!R$

2. $\boxed{\text{c}}$ L'equazione ammette due soluzioni per ogni $0 < k < \frac{3}{8}$, una soluzione per $k = \frac{3}{8}$ e $k \leq 0$, nessuna per $k > \frac{3}{8}$.

3. $\boxed{\text{d}}$ Il raggio di base della lattina di superficie minima è $r_0 = \sqrt[3]{4}$.

4. $\boxed{\text{b}}$ Infatti risulta

$$\int_0^1 \frac{\sinh x}{e^x - 1}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{\sinh x}{e^x - 1}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{1}{2}(x - e^{-x})\right]_a^1 = 1 - \frac{1}{2e}$$

5. $\boxed{\text{d}}$ La serie converge solo se $\alpha = 1$ infatti si ha

$$\sqrt[3]{n^2 - n + 1} - \sqrt[3]{n^2 - \alpha n} = \sqrt[3]{n^2 - \alpha n}\left(\sqrt[3]{\frac{(\alpha - 1)n + 1}{n^2 - \alpha n}} + 1\right) \sim \sqrt[3]{n^2 - \alpha n}\,\frac{1}{3}\frac{(\alpha - 1)n + 1}{n^2 - \alpha n}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(\alpha - 1)n + 1}{(n^2 - \alpha n)^{\frac{2}{3}}} \sim \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{\alpha - 1}{n^{\frac{1}{3}}} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{3}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

* Solo le risposte di cui è presente lo svolgimento sono ritenute valide per la valutazione del compito.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 1 marzo 2014 – $\boxed{\text{A}}$

1) La successione $a_n = \dfrac{n^{\alpha n}}{2^n n!}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ converge solo per $\alpha = 2$

$\boxed{\text{c}}$ diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh^2 x - \sinh(x^2)}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \sin(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ è derivabile solo per $\alpha = 3$ e $\beta = \frac{1}{3}$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile per ogni $\alpha > 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{|x-2|}}$

$\boxed{\text{a}}$ ammette asintito obliqui

$\boxed{\text{b}}$ ammette punti di massimo relativo

$\boxed{\text{c}}$ risulta iniettiva nel suo dominio

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \log(1 + \sqrt{1+x})\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{2} - 1$

$\boxed{\text{c}}$ $\log 2 - 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x} - x^\alpha)}\, dx$ con $\alpha > 0$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per nessun $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ solo per $0 < \alpha < 1$

$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha > \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Si ha infatti

$$\frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}{2^{n+1}(n+1)!}\,\frac{2^n n!}{n^{\alpha n}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}(n+1)^{\alpha-1}\to\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>1\\ \frac{e}{2} & \text{se } \alpha=1\\ 0 & \text{se } \alpha<1\end{cases}$$

e dunque, dal criterio del rapporto, si ottiene che la successione converge per ogni $\alpha<1$ mentre diverge se $\alpha\geq 1$.

2. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che per $x\to 0$ risulta

$$\sinh^2 x-\sinh(x^2)=(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2-(x^2+o(x^4))=x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)-(x^2+o(x^4))=\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sinh^2 x-\sinh(x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^\alpha}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<4\\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha=4\\ +\infty & \text{se } \alpha>4\end{cases}$$

Poichè $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin(\beta x)=0$ per ogni $\beta\in\mathbb{R}$, ne deduciamo che la funzione risulta continua solo se $\alpha<4$ per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.
Riguardo alla derivabilità, per quanto sopra, per ogni $\alpha<4$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sinh^2 x-\sinh(x^2)}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^{\alpha+1}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<3\\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha=3\\ +\infty & \text{se } \alpha>3\end{cases}$$

e dunque che la funzione ammette derivata destra in $x_0=0$ solo se $\alpha\leq 3$ con $f'_+(0)=0$ se $\alpha<3$ e $f'_+(0)=\frac{1}{3}$ se $\alpha=3$. Essendo $f'(x)=\beta\cos(\beta x)$ per ogni $x<0$, abbiamo che la funzione ammette derivata sinistra in x_0 per ogni $\beta\in\mathbb{R}$ con $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\beta\cos(\beta x)=\beta$.

Ne deduciamo allora che la funzione risulta derivabile per $\alpha<3$ se $\beta=0$ e per $\alpha=3$ se $\beta=\frac{1}{3}$.

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\geq 1,\ x\neq 2\}$ con

$$\lim_{x\to 2^\pm}f(x)=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$$

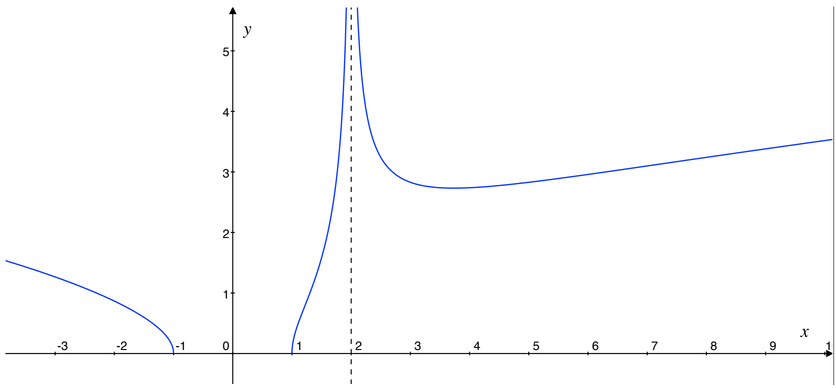
La funzione non ammette asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{|x|}}{x}=0$$

Osserviamo inoltre che la funzione non risulta iniettiva essendo $f(\pm 1) = 0$.
La funzione risulta derivabile nel suo dominio D con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^2-1}}\,\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} & \text{se } x > 2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x^2-1}}\,\frac{x^2-4x+1}{(2-x)^2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Poichè $x^2 - 4x + 1 < 0$ se e solo se $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$, dal criterio di monotonia possiamo concludere che la funzione risulta decrescente in $(-\infty, -1]$ e in $(2, 2 + \sqrt{3}]$ mentre risulta crescente in $[1, 2)$ e in $[2 + \sqrt{3}, +\infty)$. Ne segue che la funzione non ammette punti di massimo relativo, mentre $x = 2+\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo e $x = \pm 1$ sono punti di minimo assoluto.



4. La risposta corretta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \sqrt{1+x}$ (e dunque $x = t^2 - 1$ e $dx = 2t\,dt$) e quindi integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int \log(1+\sqrt{1+x})\,dx &= \int 2t\log(1+t)\,dt = t^2\log(1+t) - \int \frac{t^2}{1+t}\,dt \\ &= t^2\log(1+t) - \int t - 1 + \frac{1}{1+t}\,dt = t^2\log(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \log(1+t) + c \\ &= (t^2-1)\log(1+t) - \frac{t^2}{2} + t + c \\ &= x\log(1+\sqrt{1+x}) - \frac{1+x}{2} + \sqrt{1+x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{-1}^{0} \log(1+\sqrt{1+x})\,dx = \left[x\log(1+\sqrt{1+x}) - \frac{1+x}{2} + \sqrt{1+x}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, per $x \to 0^+$, essendo $1+\sqrt{x}+x^\alpha \to 1$ per ogni $\alpha > 0$ risulta

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}+x^\alpha)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall\, \alpha > 0.$$

Dal criterio del confronto asintotico, essendo $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ convergente, ne deduciamo che $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge per ogni $\alpha > 0$.

Per $x \to +\infty$ risulta invece che

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}+x^\alpha)} \sim \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico, essendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ convergente se e solo se $p > 1$, otteniamo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Riunendo quanto sopra si ha allora che $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx = \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 1 marzo 2014 – $\boxed{\text{B}}$

1) La successione $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^{\alpha n}}$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ converge solo per $\alpha = 3$
$\boxed{\text{c}}$ diverge per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log^2(1+x)-\log(1+x^2)}{x^\alpha} & \text{se } x > 0 \\ \sinh(\beta x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è derivabile solo per $\alpha = 2$ e ogni $\beta \in I\!R$
$\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in I\!R$
$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = 2$ e $\beta = -1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2-1}{|1-x|}}$

$\boxed{\text{a}}$ risulta iniettiva nel suo dominio
$\boxed{\text{b}}$ ammette punti di massimo relativo
$\boxed{\text{c}}$ ammette asintito obliqui
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \log(\sqrt{1-x}+1)\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\sqrt{2}-1$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ $2\log 2 - 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(2+\sqrt[3]{x}+x^\alpha)}\,dx$ con $\alpha > 0$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per nessun $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ solo per $\alpha > \frac{2}{3}$
$\boxed{\text{c}}$ solo per $\alpha < \frac{1}{3}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risposte*

1. La risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$. Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene difatti che la successione converge per ogni $\alpha > 1$ mentre diverge se $\alpha \leq 1$.

2. La risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta difatti continua per ogni $\beta \in I\!R$ e $\alpha < 3$, mentre risulta derivabile per $\alpha = 2$ e $\beta = -1$ ma anche per $\alpha < 2$ e $\beta = 0$.
Si osservi che per $x \to 0$ risulta

$$\log^2(1+x) - \log(1+x^2) = (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 - (x^2 + o(x^3)) = x^2 - x^3 + o(x^3) - (x^2 + o(x^3)) = -x^3 + o(x^3)$$

3. La risposta corretta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione non ammette asintoti obliqui in quanto $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{2\sqrt{|x|}}{x} \to 0$ per $x \to \pm\infty$. La funzione non ammette punti di massimo relativo ma un punto di minimo relativo in $x = ...$ e due punti di minimo assoluto in $x = \pm\frac{1}{2}$. La funzione non risulta iniettiva, in quanto $f(\pm\frac{1}{2}) = 0$.

4. La risposta corretta è $\boxed{\text{b}}$. Risulta

$$\int \log(\sqrt{1-x} + 1)\, dx = x \log(\sqrt{1-x} + 1) - \frac{1-x}{2} + \sqrt{1-x} + c, \quad c \in I\!R.$$

5. La risposta corretta è $\boxed{\text{c}}$. L'integrale improprio per $x \to 0^+$ converge per ogni $\alpha \in I\!R$ essendo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$, mentre per $x \to +\infty$ converge solo se $\alpha > \frac{2}{3}$ essendo

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{se } \alpha < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} & \text{se } \alpha = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{3}}} & \text{se } \alpha > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 14 giugno 2014

1) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt[3]{\cos x} - \cos(\alpha x)$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

[a] 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[b] 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
[c] maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
[d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\alpha\sin x) - xe^{\beta x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ \log\left(1+x^2\right) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, nel punto $x_0 = 0$

[a] è derivabile solo per $\alpha = -1$ e $\beta = 2$
[b] è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
[c] è derivabile solo per $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{1}{2}$
[d] nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \dfrac{|x^3-1|}{x}$

[a] è iniettiva nel suo dominio
[b] è derivabile nel suo dominio
[c] non ammette punti di minimo relativo
[d] nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\tan x + 2\cos x}$ vale

[a] $\frac{1}{5}\log 6$
[b] $\frac{1}{5}\log\frac{3}{2}$
[c] $+\infty$
[d] nessuna delle precedenti

5) La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^n}$ ha insieme di convergenza

[a] $(-1, 1)$
[b] $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$
[c] $[-\sqrt{e}, \sqrt{e})$
[d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= \sqrt[3]{\cos x} - \cos(\alpha x) = \sqrt[3]{1 + (\cos x - 1)} - \cos(\alpha x) \\
&= \frac{1}{3}(\cos x - 1) - \frac{1}{9}(\cos x - 1)^2 + o((\cos x - 1)^2) + \frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + \frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^4) \\
&= \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{36} - \frac{\alpha^4}{24}\right)x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha^2 \neq \frac{1}{3}$ allora $f_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2 mentre se $\alpha^2 = \frac{1}{3}$, allora $f_\alpha(x) = -\frac{1}{54}x^4 + o(x^4)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 4.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log(1 + x^2) = 0 = f(0)$$

Mentre, essendo per $x \to 0$, $\log(1 + \alpha \sin x) = \alpha \sin x + o(\sin x) = \alpha x + o(x)$ e $xe^{\beta x} = x + o(x)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \alpha \sin x) - xe^{\beta x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha - 1)x + o(x)}{x} = \alpha - 1$$

per ogni $\alpha \in I\!R$. Dunque $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$, per ogni $\beta \in I\!R$. Riguardo alla derivabilità, abbiamo che per ogni $x < 0$ risulta $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e poichè

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{1 + x^2} = 0$$

abbiamo che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 0$.
Riguardo alla derivata destra, per $\alpha = 1$, risulta $\log(1 + \sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ mentre $xe^{\beta x} = x(1 + \beta x + o(x)) = x + \beta x^2 + o(x^2)$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \sin x) - xe^{\beta x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(\frac{1}{2} + \beta)x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} - \beta$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = -\frac{1}{2} - \beta$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{1}{2}$.

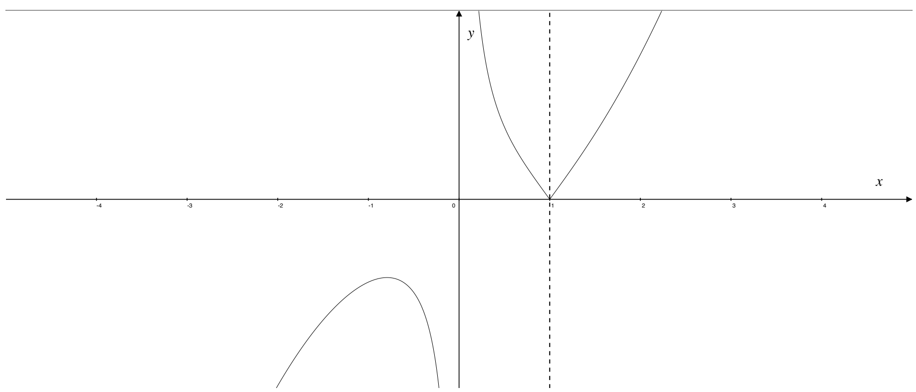
3. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $D = \{x \in I\!R \,|\, x \neq 0\}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Osserviamo che la funzione non risulta iniettiva nel suo dominio: dal Teorema dei valori intermedi, essendo $f(x)$ continua e $f(1) = 0$, abbiamo che per ogni $\alpha > 0$ esistono $x_0 \in (0,1)$ e $x_1 \in (1,+\infty)$ tali che $f(x_0) = f(x_1) = \alpha$. Quindi $\boxed{\text{a}}$ è falsa.
La funzione risulta derivabile in ogni $x \in D$, $x \neq 1$, con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+1}{x^2} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{2x^3+1}{x^2} & \text{se } x < 1,\, x \neq 0 \end{cases}$$

mentre non risulta derivabile in $x = 1$ essendo $f'_\pm(1) = \pm 3$ (dunque $\boxed{\text{b}}$ è falsa). Risulta inoltre $f'(x) \geq 0$ solo per $x \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e $x > 1$, dal criterio di monotonia possiamo concludere che la funzione risulta crescente in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$ e in $[1,+\infty)$ mentre risulta decrescente in $[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$ e $(0,1]$. Ne segue che la funzione ammette come punto di massimo relativo il punto $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ con $f(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, mentre $x = 1$ è punto di minimo relativo con $f(1) = 0$ (quindi $\boxed{\text{c}}$ è falsa).



4. La risposta corretta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \sin x$ (e quindi $dt = \cos x\, dx$) otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3\tan x + 2\cos x} &= \int \frac{\cos x}{3\sin x + 2\cos^2 x}\, dx = \\ &= \int \frac{dt}{-2t^2 + 3t + 2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})(2-t)} \\ &= \tfrac{1}{5}\int \frac{1}{t+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2-t}\, dt = \tfrac{1}{5}(\log|t+\tfrac{1}{2}| - \log|2-t|) + c \\ &= \tfrac{1}{5}(\log|\sin x + \tfrac{1}{2}| - \log|2-\sin x|) + c\end{aligned}$$

Osservato che per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ risulta $2 \geq \sin x \geq -\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\tan x + 2\cos x} &= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^+} \int_0^b \frac{dx}{3\tan x + 2\cos x} \\ &= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^+} \left[\tfrac{1}{5}(\log(\sin x + \tfrac{1}{2}) - \log(2-\sin x)\right]_0^b = \tfrac{1}{5}\log 6\end{aligned}$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Posto $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^n}$ si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^n}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\frac{2^n}{n}} = e^{\frac{2^n}{n}\log\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

ed essendo $\frac{2^n}{n}\log(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \sim -\frac{2^n}{n}\frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2n} \to 0$, otteniamo che $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ e dunque, dal metodo della radice di Cauchy-Hadamard, ne segue che la serie ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Dalle proprietà del raggio di convergenza otteniamo allora che la serie converge in ogni $|x| < 1$ e non converge in ogni $|x| > 1$. Osservato poi che, dal limite notevole $(1 + \frac{\alpha}{x_n})^{x_n} \to e^{\alpha}$ per ogni successione $x_n \to +\infty$, si ha

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2^n} = \left(1 + \frac{-\frac{1}{2}}{2^n}\right)^{2^n} \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie possiamo allora dedurre che le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ non risultano convergenti e dunque che la serie di potenze data non converge per $x = \pm 1$. Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che l'insieme di convergenza della serie di potenze data è $(-1, 1)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12 luglio 2014

1) La funzione $f_\alpha(x) = \sqrt[4]{1+\sin(\alpha x)} - \sqrt{\cos x}$ per $x \to 0^+$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{c}}$ maggiore di 4 per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La successione $a_n = n^2(\log(1+\sin\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}e^{\frac{\alpha}{n}}))$ risulta infinitesima

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ solo se $\alpha = -\frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ solo se $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \dfrac{|x^3-1|}{x^2}$

$\boxed{\text{a}}$ non ammette asintoti obliqui
$\boxed{\text{b}}$ è derivabile nel suo dominio
$\boxed{\text{c}}$ è iniettiva nel suo dominio
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4)* L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(3\cos x+2)}{3+\sin^2 x}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\log 2 - \log 3$
$\boxed{\text{b}}$ $\log\frac{8}{3}$
$\boxed{\text{c}}$ $\log\frac{9}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5)* La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log(e^n+1)}$ ha insieme di convergenza

$\boxed{\text{a}}$ $[-1,1)$
$\boxed{\text{b}}$ $(-e,e)$
$\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{R}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, per $x \to 0$ risulta

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \sqrt[4]{1+\sin(\alpha x)} - \sqrt{\cos x} = \sqrt[4]{1+\sin(\alpha x)} - \sqrt{1+(\cos x - 1)} \\ &= \frac{1}{4}\sin(\alpha x) - \frac{3}{32}\sin^2(\alpha x) + o(\sin^2(\alpha x)) - \frac{1}{2}(\cos x - 1) + o(\cos x - 1) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha x + o(x^2)) - \frac{3}{32}(\alpha^2 x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{\alpha}{4}x + (\frac{1}{4} - \frac{3\alpha^2}{32})x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Ne deduciamo che se $\alpha \neq 0$ allora $f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{4}x + o(x)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 1 mentre se $\alpha = 0$, allora $f_\alpha(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$ e la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che per $x \to 0$ risulta $\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ mentre $xe^{\alpha x} = x(1+\alpha x + o(x)) = x + \alpha x^2 + o(x^2)$, per $n \to +\infty$, ponendo $x = \frac{1}{n}$, per $n \to +\infty$ otteniamo

$$a_n = n^2\left(\log\left(1+\sin\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{n}e^{\frac{\alpha}{n}}\right) = n^2\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} - \left(\tfrac{1}{n} + \tfrac{\alpha}{n^2}\right) + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right) + o(1) \to -\left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right)$$

Ne segue che la successione risulta infinitesima se e solo se $\alpha = -\frac{1}{2}$.

3. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita e continua in $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$$

Risulta inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^3-1|}{x^3} = \pm 1$$

e

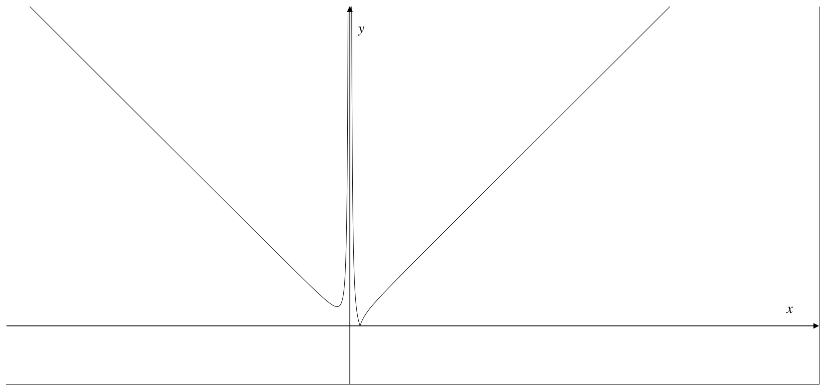
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^3-1| \mp x^3}{x^2} = 0$$

Ne segue che le bisettrici $y = \pm x$ risultano asintoti obliqui rispettivamente per $x \to \pm\infty$, dunque $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Osserviamo che la funzione non risulta iniettiva nel suo dominio: dal Teorema dei valori intermedi, essendo $f(x)$ continua, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $f(1) = 0$, abbiamo che per ogni $\alpha > 0$ esistono $x_0 \in (0,1)$ e $x_1 \in (1,+\infty)$ tali che $f(x_0) = f(x_1) = \alpha$. Quindi $\boxed{\text{c}}$ è falsa.
La funzione risulta derivabile in ogni $x \in D$, $x \neq 1$, con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2}{x^3} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{x^3+2}{x^3} & \text{se } x < 1,\ x \neq 0 \end{cases}$$

mentre non risulta derivabile in $x = 1$ essendo $f'_\pm(1) = \lim\limits_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm 3$, dunque $\boxed{\text{b}}$ è falsa.

Risulta inoltre $f'(x) \geq 0$ solo per $-\sqrt[3]{2} \leq x < 0$ e $x > 1$, dal criterio di monotonia possiamo concludere che la funzione risulta crescente in $[-\sqrt[3]{2}, 0)$ e in $[1, +\infty)$ mentre risulta decrescente in $(-\infty, \sqrt[3]{2}]$ e $(0, 1]$. Ne segue che la funzione non ammette punti di massimo relativo mentre ammette come punto di minimo assoluto il punto $x = 1$ dove $f(1) = 0$ e come punto di minimo relativo il punto $x = -\sqrt[3]{2}$ con $f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.



4. La risposta corretta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \cos x$, e quindi $dt = -\sin x\, dx$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x(3\cos x + 2)}{3 + \sin^2 x}\, dx &= -\int \frac{3t + 2}{3 + (1 - t^2)}\, dt = \int \frac{3t + 2}{t^2 - 4}\, dt = \int \frac{2}{t - 2} + \frac{1}{t + 2}\, dt \\ &= 2\log|t - 2| + \log|t + 2| + c = 2\log|\cos x - 2| + \log|\cos x + 2| + c\end{aligned}$$

Osservato che per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ risulta $2 \geq \cos x \geq -2$ otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(3\cos x + 2)}{3 + \sin^2 x}\, dx = [2\log(2 - \cos x) + \log(\cos x + 2)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\log 2 - \log 3 = \log\frac{8}{3}$$

Osserviamo che al risultato si poteva giungere direttamente senza operare la sostituzione osservato che

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x(3\cos x + 2)}{3 + \sin^2 x}\, dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2\sin x\cos x}{3 + \sin^2 x}\, dx + 2\int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x}\, dx \\ &= \frac{3}{2}\log(3 + \sin^2 x) + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{2 - \cos x} + \frac{\sin x}{2 + \cos x}\, dx \\ &= \frac{3}{2}\log(3 + \sin^2 x) + \frac{1}{2}\log|2 - \cos x| - \frac{1}{2}\log|2 + \cos x| + c\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(3\cos x + 2)}{3 + \sin^2 x}\, dx &= \left[\frac{3}{2}\log(3 + \sin^2 x) + \frac{1}{2}\log(2 - \cos x) - \frac{1}{2}\log(2 + \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{2}\log 4 - \log 3 = \log\frac{8}{3}\end{aligned}$$

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Posto $a_n = \frac{1}{\log(e^n+1)}$, per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\log(e^n+1)}{\log(e^{n+1}+1)} = \frac{n + \log(1+\frac{1}{e^n})}{n+1+\log(1+\frac{1}{e^{n+1}})} \to 1$$

e dunque, dal metodo del rapporto di D'Alembert, ne segue che la serie ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Dalle proprietà del raggio di convergenza otteniamo allora che la serie converge in ogni $|x| < 1$ e non converge in ogni $|x| > 1$. Osservato poi che

$$a_n = \frac{1}{\log(e^n+1)} = \frac{1}{n+\log(1+\frac{1}{e^n})} \sim \frac{1}{n}$$

e che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, dal criterio del confronto asintotico possiamo concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge e quindi che la serie di potenze diverge per $x = 1$.
Si osservi poi che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e che, essendo il logaritmo e l'esponenziale di base e funzioni crescenti, risulta $\log(1+e^x) < \log(1+e^y)$ per ogni $x < y$ e dunque che

$$a_{n+1} = \frac{1}{\log(e^{n+1}+1)} < \frac{1}{\log(e^n+1)} = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dal Criterio di Leibniz possiamo allora concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ risulta convergente e quindi che la serie di potenze converge per $x = -1$.
Riunendo quanto ottenuto possiamo concludere che l'insieme di convergenza della serie di potenze data è $[-1, 1)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 4 ottobre 2014

1) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2)-\sin^2(\alpha x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ x+\beta & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è derivabile solo per $\alpha = \beta = 0$

$\boxed{\text{b}}$ è continua per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile solo per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $\arctan x = \alpha x$ con $\alpha > 0$ ammette almeno una soluzione non nulla

$\boxed{\text{a}}$ per nessun α

$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{c}}$ solo se $\alpha < 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3)* L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x-3}{4x^2-4x+2}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 0

$\boxed{\text{b}}$ $\log 2 - \frac{\pi}{8}$

$\boxed{\text{c}}$ $-\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sin x - x^\alpha}\,dx$ con $\alpha > 0$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ solo se $\alpha > 1$

$\boxed{\text{b}}$ solo se $\alpha < 1$

$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha \neq 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5)* La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{\alpha n}}$ risulta convergente

$\boxed{\text{a}}$ per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha > 1$

$\boxed{\text{c}}$ solo se $\alpha < 2$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione

1. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $x \to 0$ risulta

$$\log(1+x^2) - \sin^2(\alpha x) = x^2 + o(x^3) - (\alpha x + o(x^2))^2 = (1-\alpha^2)x^2 + o(x^3)$$

Ne deduciamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) - \sin^2(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha^2)x^2 + o(x^3)}{x} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

mentre, essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + \beta = \beta = f(0), \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

otteniamo che $f(x)$ risulterà continua in $x_0 = 0$ solo per $\beta = 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Riguardo alla derivabilità, abbiamo che per ogni $x < 0$ risulta $f'(x) = 1$ e dunque che la funzione ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_-(0) = 1$.
Riguardo alla derivata destra, da quanto ottenuto sopra, se $\beta = 0$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) - \sin^2(\alpha x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha^2)x^2 + o(x^3)}{x^2} = 1-\alpha^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi la funzione ammette derivata destra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = 1-\alpha^2$. Ne segue che la funzione risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Posto $f_\alpha(x) = \arctan x - \alpha x$, determiniamo il numero di soluzioni dell'equazione $f_\alpha(x) = 0$ al variare di $\alpha > 0$. La funzione risulta definita e continua in $\mathbb{R}$, ove risulta dispari con $f_\alpha(0) = 0$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) = \mp\infty, \quad \forall \alpha > 0.$$

La funzione risulta derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+x^2} - \alpha = \frac{1-\alpha-\alpha x^2}{1+x^2}$$

risulta allora $f'_\alpha(x) > 0$ solo se $\alpha x^2 < 1-\alpha$. Avremo allora che se $\alpha \geq 1$ allora $f'_\alpha(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre se $0 < \alpha < 1$ allora $f'_\alpha(x) > 0$ se e solo se $|x| < \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = x_\alpha$. Dal criterio di monotonia possiamo concludere che se $\alpha \geq 1$ allora la funzione risulta strettamente decrescente in $\mathbb{R}$. Se invece $0 < \alpha < 1$ allora la funzione risulta strettamente decrescente in $(-\infty, -x_\alpha]$ ed in $[x_\alpha, +\infty)$ e strettamente crescente in $[-x_\alpha, x_\alpha]$, i punti $\pm x_\alpha$ risultano rispettivamente punti di minimo e di massimo per la funzione e poichè $f_\alpha(0) = 0$, possiamo concludere che $f_\alpha(-x_\alpha) < 0 < f_\alpha(x_\alpha)$.

Dal Teorema di esistenza degli zeri e dalla monotonia della funzione otteniamo che se $\alpha \geq 1$ allora la funzione ammette un unico zero, $x_0 = 0$, mentre se $0 < \alpha < 1$ allora la funzione ammette tre zeri, $x_0 = 0$, $x_+ > x_\alpha > 0$ e $x_- < -x_\alpha < 0$.

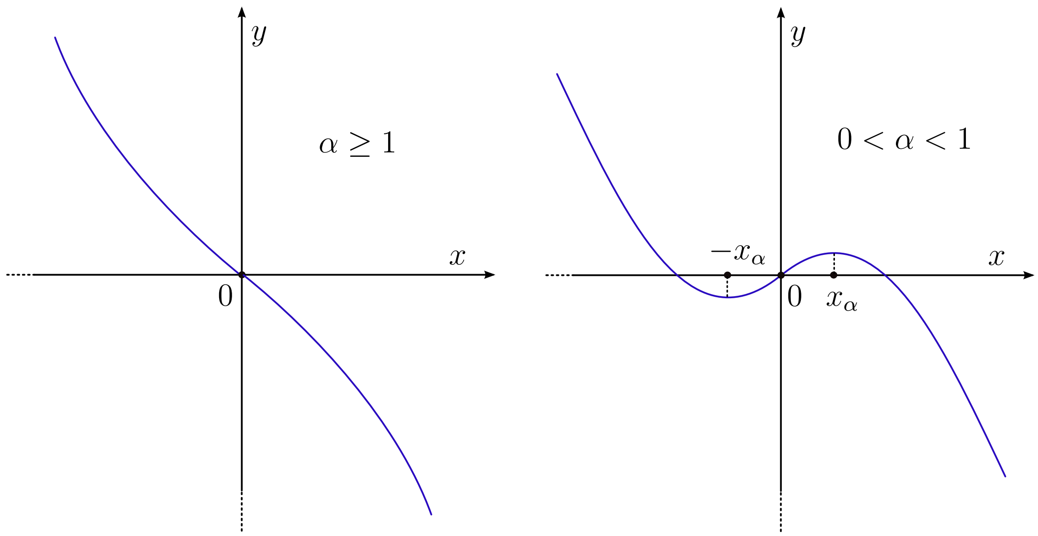


Grafico di $f_\alpha(x) = \arctan x - \alpha x$

3. La risposta corretta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-3}{4x^2-4x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+1}\,dx - \int \frac{1}{4x^2-4x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(2x^2-2x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(2x^2-2x+1) - \frac{1}{2}\arctan(2x-1) + c\end{aligned}$$

Dalla formula fondamentale del calcolo integrale otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4x-3}{4x^2-4x+2}\,dx &= \left[\frac{1}{2}\log(2x^2-2x+1) - \frac{1}{2}\arctan(2x-1)\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\arctan(1) + \frac{1}{2}\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

4. La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $x \to 0^+$, essendo $\arctan\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ mentre

$$\sin x - x^\alpha = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha \sim \begin{cases} x & \text{se } \alpha > 1 \\ -\frac{x^3}{6} & \text{se } \alpha = 1 \\ -x^\alpha & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

risulta

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha > 1 \\ -\frac{6}{x^{\frac{5}{2}}} & \text{se } \alpha = 1 \\ -\frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico, essendo $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ convergente se e solo se $p < 1$, ne deduciamo che $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge per ogni $\alpha \neq 1$.

Per $x \to +\infty$ risulta invece $\arctan\sqrt{x} \to \frac{\pi}{2}$ mentre, essendo $\alpha > 0$, si ha $\sin x - x^\alpha = x^\alpha(\frac{\sin x}{x^\alpha} - 1) \sim -x^\alpha$. Ne segue che

$$f_\alpha(x) \sim -\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha}, \quad \forall \alpha > 0,$$

e dal criterio del confronto asintotico, essendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ convergente se e solo se $p > 1$, otteniamo che $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

Riunendo quanto sopra si ha allora che $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx = \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

5. La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Posto $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^{\alpha n}}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}\frac{n^{\alpha n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^\alpha}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{4}{e^2} < 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e dunque, dal criterio del rapporto per serie numeriche, possiamo concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha \geq 2$.