Prova Teorica[1]

(1) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi divergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La successione $(a_n)_{n\in I\!N}$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ è divergente. $\boxed{\text{Vero}}$

(2) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La successione $(a_n)_{n\in I\!N}$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$

B. Se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$

(3) Sia $f(x)$ funzione non negativa, continua ed integrabile in senso improprio nell'intervallo $(a, b]$. Se esiste $\lim_{x\to a^+} f(x)$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x\to a^+} f(x) \in I\!R$. $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\int_a^b f^2(x)\,dx$ diverge. $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$

[1]le prime 10 domande sono le domande proposte nelle prove d'esame dello scorso anno accademico

(4) Sia $f(x)$ funzione non negativa, continua ed integrabile in senso improprio nell'intervallo $[a, +\infty)$. Se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $\int_a^{+\infty} f^2(x)\, dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\int_a^{+\infty} \sqrt{f(x)}\, dx$ diverge. $\boxed{\text{Falso}}$

(5) Sia $f(x)$ funzione definita e limitata in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette minimo o massimo in I. $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ ammette estremo inferiore e superiore finiti in I. $\boxed{\text{Vero}}$

C. Se $\sup_{x \in I} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$ allora $f(x)$ è costante in I. $\boxed{\text{Vero}}$

(6) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione infinitesima. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ è convergente. $\boxed{\text{Falso}}$

(7) Sia $f(x)$ una funzione continua in $[1, +\infty)$ e infinitesima per $x \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ è divergente. $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ è convergente. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $\int_1^{+\infty} [f(x)]^2$ è convergente. $\boxed{\text{Falso}}$

(8) Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. se $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, allora $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$.

Falso

B. se $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, allora $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \leq \int_a^x g(t)\, dt$, $\forall\, x \in (a, b)$.

Vero

C. se $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$, e $f(a) \leq g(a)$ allora $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Vero

(9) Sia $f(x)$ una funzione continua e crescente in $[0, +\infty)$ tale che $f(0) = 0$. Posto $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è crescente. Vero

B. $F(x)$ è convessa. Vero

C. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Falso

(10) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ serie a termini di segno alterno convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente. Falso

B. $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Vero

C. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \geq 1$. Vero

(11) Sia (a_n) successione positiva limitata e sia (b_n) successione infinitesima. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $(a_n \cdot b_n)$ è limitata. Vero

B. $(\frac{b_n}{a_n})$ è infinitesima. Falso

C. $(\frac{a_n}{b_n})$ è regolare. Falso

(12) Sia $f(x)$ una funzione continua in $(0,1]$ tale che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $(0,1]$. Vero

B. esiste $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)}$. Falso

C. $\int_0^1 f(x)\, dx$ è convergente. Vero

(13) Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$, derivabile in $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $|f(x)|$ è continua in $[a,b]$. Vero

B. $|f(x)|$ non è derivabile in x_0. Vero

C. x_0 è punto di minimo per $|f(x)|$ in $[a,b]$. Vero

(14) Sia $f(x)$ una funzione continua e limitata in $[1,+\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_1^{+\infty} f(x)$ è convergente. Falso

B. $\int_1^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ è divergente. Falso

C. $\int_1^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$ è convergente. Vero

(15) Sia $f(x)$ funzione positiva, derivabile e strettamente convessa in $\mathbb{R}$ tale che $f'(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $x = 0$ è punto di minimo per $f(x)$ in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$

C. $f(x)$ non ammette massimi relativi in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Falso}}$

(16) Sia $f(x)$ funzione continua, pari e positiva in $\mathbb{R}$. Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è dispari in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$

B. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\int_{-b}^{b} f(t)dt = 2\int_0^b f(t)\,dt$. $\boxed{\text{Vero}}$