LIMITI NOTEVOLI per SUCCESSIONI

Francesca G. Alessio [(a)]

Dato $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

Per ogni $a > 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

Dato $b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}}$$

Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1}$$

Limiti coinvolgenti funzioni trigonometriche

Per ogni succesione $x_n \to 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sin(x_n) = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \cos(x_n) = 1}$$

ed inoltre

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(x_n)}{(x_n)^2} = \frac{1}{2}}$$

Limiti coinvolgenti funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze

Per ogni $a > 1$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_n \to +\infty \\ a^{x_0} & \text{se } x_n \to x_0 \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } x_n \to -\infty \end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \log_a(x_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_n \to +\infty \\ \log_a(x_0) & \text{se } x_n \to x_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } x_n \to 0^+ \end{cases}}$$

e per ogni $b > 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_n \to +\infty \\ x_0^b & \text{se } x_n \to x_0 > 0 \\ 0 & \text{se } x_n \to 0^+ \end{cases}}$$

[(a)] Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche - Università Politecnica delle Marche

Per ogni successione $x_n \to \pm\infty$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{\alpha}{x_n})^{x_n} = e^{\alpha}}$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed ogni successione $x_n \to 0$ si ha

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1 + x_n)^{\alpha} - 1}{x_n} = \alpha}$$

dove $\log x = \log_e x$.

Infiniti di ordine crescente

Osservato che per ogni $b > 0$ e $a > 1$ risulta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \log_a n = \lim_{n\to+\infty} n^b = \lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} n! = \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty}$$

valgono

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$

Inoltre, se $x_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a x_n}{x_n^b} = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^b}{a^{x_n}} = 0}$$

da cui, se $x_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n^b \log_a x_n = 0}$$