LIMITI NOTEVOLI PER FUNZIONI

Francesca G. Alessio [a]

Limiti coinvolgenti funzioni trigonometriche

Si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Limiti coinvolgenti funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze

Per ogni $a > 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0}.$$

ed anche

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \ (x_0 > 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty}.$$

Inoltre per ogni $b \in \mathbb{R}$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}, \quad \lim_{x\to x_0} x^b = {x_0}^b \ (x_0 > 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} x^b = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}}.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{a}{x})^x = e^a} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$$

dove $\log x = \log_e x$. Da cui si deduce che per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}}$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$$

Infiniti di ordine crescente

Osservato che per ogni $b > 0$ e $a > 1$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty} x^b = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty}$$

e valgono

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0}$$

[a] Dipartimento di Scienze Matematiche - Università Politecnica delle Marche