Appunti di Analisi Matematica Tre [1]

Francesca G. Alessio
Dipartimento di Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche

[1] Le presenti dispense costituiscono le note per l'insegnamento di Analisi Matematica 3 per il corso di Laurea in Ingegneria Elettronica dell'a.a. 2009/10. Si prega di segnalare all'autore eventuali errori presenti nel testo.

Indice

Capitolo 1. Numeri Complessi e Serie di Potenze in $\mathbb{C}$ 5
1. Richiami sui numeri complessi 5
2. Successioni e serie in $\mathbb{C}$ 9
3. Serie di potenze 14
4. Sviluppi in serie di potenze di alcune funzioni elementari 17

Capitolo 2. Funzioni di variabile complessa 23
1. Limiti e continuità 23
2. Successioni e serie di funzioni complesse 24
3. Funzioni olomorfe 25
4. Integrazione lungo curve 33

Capitolo 3. Teoremi fondamentali sulle funzioni olomorfe 41
1. Esistenza di una primitiva 41
2. Teorema di Cauchy 43
3. Formula di Cauchy e rappresentazione in serie di potenze 46
4. Teorema di Cauchy generalizzato e Indice di una curva chiusa 49
5. Alcune conseguenze della Formula di Cauchy 53
6. Funzioni armoniche 57

Capitolo 4. Singolarità di Funzioni Olomorfe 59
1. Serie di Laurent 59
2. Classificazione delle Singolarità 62
3. Teorema dei residui 66
4. Applicazione al calcolo di integrali 69
5. Appendice: Residuo all'infinito 73

Capitolo 5. Misura e Integrale di Lebesgue 77
1. Costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ 77
2. Funzioni misurabili 83
3. Definizione dell'integrale di Lebesgue 84
4. Confronto tra l'integrale di Lebesgue e di Riemann 88
5. Principali Teoremi sull'integrale di Lebesgue 91

Capitolo 6. Proiezioni Ortogonali e Serie di Fourier 95

1. Spazi vettoriali normati e Spazi di Banach 95
2. Spazi vettoriali con prodotto scalare e spazi di Hilbert 98
3. Gli spazi $\mathcal{L}^p$ 99
4. Vettori ortogonali e proiezioni ortogonali 101
5. Serie di Fourier in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 104
6. Qualche applicazione 117

Capitolo 7. Trasformata di Fourier 123
1. Definizione e prime proprietà 123
2. Antitrasformata e Teorema di dualità 131
3. Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2$ 133
4. Applicazione alle equazioni differenziali 135

Capitolo 8. Trasformata di Laplace 139
1. Definizione e prime proprietà 139
2. Proprietà elementari 144
3. Confronto con la Trasformata di Fourier e Formula di Inversione 149
4. Risoluzione di equazioni differenziali lineari 153

CAPITOLO 1

Numeri Complessi e Serie di Potenze in $\mathbb{C}$

1. Richiami sui numeri complessi

Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) di numeri reali munito delle operazioni di somma e prodotto definite nel seguente modo

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d) \quad \text{e} \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Si può provare che tali operazioni soddisfano le proprietà caratteristiche di un campo algebrico (*proprietà associativa, commutativa, distributiva, esistenza elemento neutro, di opposto e reciproco*). In particolare, risulta elemento neutro della somma l'elemento $(0, 0)$ mentre elemento neutro del prodotto risulta essere $(1, 0)$. L'elemento opposto di (a, b) è l'elemento $-(a, b) := (-a, -b)$ mentre il reciproco di $(a, b) \neq (0, 0)$ è invece

$$\frac{1}{(a, b)} := (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}).$$

Osserviamo che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ può essere identificato come sottoinsieme di $\mathbb{C}$ identificando ogni $a \in \mathbb{R}$ con il numero complesso $(a, 0) \in \mathbb{C}$, scriveremo quindi a in luogo di $(a, 0)$ e penseremo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. I numeri complessi della forma $(0, b)$ vengono invece detti immaginari puri.
Usualmente un numero complesso $(a, b) \in \mathbb{C}$ viene rappresentato nella forma $a + ib$ (forma algebrica) dove si conviene che $1 := (1, 0)$ mentre $i := (0, 1)$ viene detta unità immaginaria:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$$

Usuale è inoltre la notazione

$$a := a + i0 \quad \text{e} \quad ib := 0 + ib$$

Con tale notazione le operazioni di somma e prodotto risultano definite da

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) \quad \text{e} \quad (a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Tali operazioni risultano formalmente immediate osservato che l'unità immaginaria i soddisfa la proprietà

$$i^2 := i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1,$$

da cui, utilizzando le usuali regole algebriche, vediamo che

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = ac+iad+ibc-bd = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il numero reale a viene detto parte reale del numero complesso z e viene denotato con $Re(z)$, mentre il numero reale b viene detto parte immaginaria del numero complesso z e viene denotato con $Im(z)$:

$$Re(z) = Re(a + ib) := a \quad \text{e} \quad Im(z) = Im(a + ib) := b$$

Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, la quantità $\sqrt{a^2 + b^2}$ viene detta modulo del numero complesso z e viene denotata con $|z|$:

$$|z| = |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$.
2. $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ e $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.
3. *Diseguaglianza triangolare*: $|z + w| \leq |z| + |w|$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$.
5. $|zw| = |z||w|$, per ogni $z, w \in \mathbb{R}$.

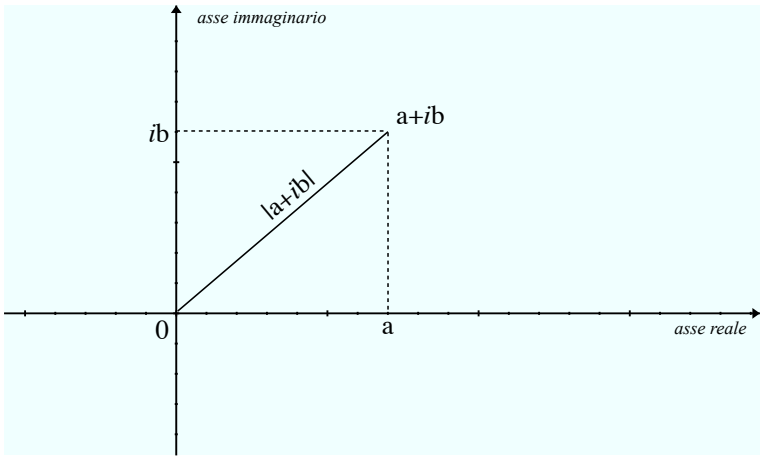
Dato un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$, diremo numero complesso coniugato il numero $\bar{z} := a - ib$. Osserviamo che risulta

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

da cui in particolare

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Se pensiamo, come naturale, di rappresentare i numeri complessi sul piano cartesiano (che chiameremo in questo contesto piano complesso), il modulo $|a + ib|$ rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine del piano $(0, 0)$. Osserviamo che mediante tale rappresentazione i numeri reali, della forma $(a, 0)$ saranno rappresentati dai punti dell'asse delle ascisse, che chiameremo asse reale, mentre i numeri immaginari, ovvero della forma $(0, b)$, saranno rappresentati dall'asse delle ordinate, che chiameremo asse immaginario:



Possiamo rappresentare inoltre un numero complesso z utilizzando le coordinate polari del corrispondente punto del piano complesso. Infatti, se $z \in \mathbb{C}$

e $z \neq 0$ avremo che, posto $\rho = |z|$ il modulo di z, esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che z potrà essere rappresentato dalla forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

detta forma trigonometrica del numero complesso z.
L'angolo θ è detto argomento del numero z e viene denotato con $\arg z$. Chiaramente se θ è argomento di z saranno argomenti di z anche $\theta + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ (l'argomento è determinato a meno di multipli interi di 2π). Diremo argomento principale del numero complesso z quell'unico argomento di z appartenente all'intervallo $(-\pi, \pi]$ e denoteremo tale argomento con $\operatorname{Arg} z$.
Utilizzando la rappresentazione trigonometrica, osserviamo che dati due numeri complessi $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ risulta

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

Ne segue in particolare che $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
In particolare dalla precedente formula si ottiene che per ogni $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ risulta

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

da cui, per induzione, si ottiene la *formula di De Moivre*:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha dunque che

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{e} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che per ogni $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ si ha

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\rho^2}\rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

e dunque che la formula di De Moivre risulta valida per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dalla formula di De Moivre, preso $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, gli n numeri complessi

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})), \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

risultano tutte e sole le soluzioni dell'equazione $z^n = w$ e vengono detti radici n-esime di w.

Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$ si definisce esponenziale di z il numero

$$e^z = e^{a+ib} := e^a(\cos b + i\sin b).$$

Osserviamo che il numero complesso a secondo membro è rappresentato in forma trigonometrica, quindi risulta

$$|e^z| = e^a = e^{Re(z)} \quad \text{mentre} \quad \arg(e^z) = b = Im(z).$$

Si può provare che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ risulta

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

da cui in particolare che

$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C},\, k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, dato $z \neq 0$ si definisce logaritmo principale di z il numero complesso

$$\operatorname{Log} z := \log|z| + i\operatorname{Arg} z$$

Osserviamo che dalla definizione, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, risulta

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Log} z} &= e^{\log|z| + i\operatorname{Arg}(z)} = e^{\log|z|}(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)) \\ &= |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)) = z. \end{aligned}$$

mentre si ha $\operatorname{Log}(e^z) = \log|e^z| + i\operatorname{Arg}(e^z) = Re(z) + i(Im(z) + 2k\pi) =$ e dunque $\operatorname{Log}(e^z) = z$ solo se $Im(z) \in (-\pi, \pi]$.
Utilizzando il logaritmo principale, dato $z \neq 0$ e $a \in \mathbb{C}$ si definisce la potenza principale z^a ponendo

$$z^a := e^{a\operatorname{Log} z}.$$

Infine, poichè per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ e $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, si ottengono le seguenti *formule di Eulero*:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Viene allora naturale definire il seno e il coseno di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ponendo:

$$\cos z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Si definiscono inoltre le funzioni iperboliche senoiperbolico e cosenoiperbolico di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ mediante:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Si ha allora che $\cos(iz) = \cosh z$ e $\cosh(iz) = \cos z$ mentre $\sin(iz) = i\sinh z$ e $\sinh(iz) = i\sin z$. Si può provare che tali funzioni soddisfano le seguenti proprietà

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

e per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ valgono le formule di addizione

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad \text{e} \quad \sin(z_1+z_2) = \cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2$$

Si ha invece che $|\cos z|$ e $|\sin z|$ non risultano limitate in $\mathbb{C}$. Infatti dalle formule di addizione per ogni $a + ib \in \mathbb{C}$ si ha

$$\cos(a+ib) = \cos a \cosh b - i\sin a \sinh b \quad \text{e} \sin(a+ib) = \sin a \cosh b + i\cos a \sinh b$$

da cui

$$|\cos(a+ib)|^2 = \cos^2 a + \sinh^2 b \quad \text{e} \quad |\sin(a+ib)|^2 = \sin^2 a + \sinh^2 b.$$

Concludiamo ricordando che, essendo $\mathbb{C}$ identificato con $\mathbb{R}^2$, la struttura metrica dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è quella di $\mathbb{R}^2$. Ricordiamo per completezza

le principali definizioni. La distanza tra due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ viene definita ponendo

$$d(z, w) := |z - w| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Dato $r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ denoteremo nel seguito con

$$\mathcal{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\} \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{B}}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}$$

il disco, rispettivamente aperto e chiuso, di centro z_0 e raggio r.

Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{C}$ verrà detto aperto se per ogni $z_0 \in A$ esiste $\delta > 0$ tale che $\mathcal{B}_\delta(z_0) \subset A$. Diremo che un sottoinsieme $A \subset \mathbb{C}$ è chiuso se il suo complementare $\mathbb{C} \setminus A$ risulta aperto.
Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{C}$, un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ viene detto punto di accumulazione di A se per ogni $\delta > 0$ l'insieme $A \cap \mathcal{B}_\delta(z_0)$ contiene elementi di A distinti da z_0. Un punto $z_0 \in A$ viene detto punto isolato di A se non risulta punto di accumulazione per A. Un punto $z_0 \in A$ è detto punto interno di A se esiste $\delta > 0$ tale che $\mathcal{B}_\delta(z_0) \subset A$. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ verrà detto punto di frontiera di A se per ogni $\delta > 0$ il disco $\mathcal{B}_\delta(z_0)$ contiene sia punti di A che punti non appartenenti ad A. Diremo frontiera di A l'insieme ∂A dei punti di frontiera di A. Ad esempio

$$\partial \mathcal{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}$$

Infine, diremo chiusura di un insieme $A \subset \mathbb{C}$ il più piccolo chiuso $\bar{A}$ contenente A. Si può provare che

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

2. Successioni e serie in $\mathbb{C}$

I concetti di successione, di successione convergente e i risultati visti in campo reale possono essere estesi ai numeri complessi ad eccezione dei risultati che sfruttano le proprietà di ordinamento dei numeri reali. Riportiamo di seguito i principali risultati sulle successioni e sulle serie di numeri complessi.

Consideriamo una successione di numeri complessi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Diremo che $\ell \in \mathbb{C}$ è il limite della successione per $n \to +\infty$ e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ risulta $|z_n - \ell| < \varepsilon$ ovvero per ogni $n \geq \nu$ risulta $z_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(\ell)$. Diremo in tal caso che la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite ℓ per $n \to +\infty$.

Osserviamo che una successione di numeri complessi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ individua due successioni di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ essendo $z_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Per la definizione data, abbiamo che la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ risulta

convergente se e solo se risultano tali le successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n + ib_n) = \ell = a + ib \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ e } \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Potranno quindi estendersi alle successioni in $\mathbb{C}$ i Teoremi di unicità del limite, sull'algebra dei limiti, sulla limitatezza delle successioni convergenti mentre non potranno essere estesi i Teoremi di confronto ed i concetti di successione monotona in quanto utilizzano l'ordinamento dei numeri reali.

Introduciamo inoltre un concetto che risulterà fondamentale nel seguito. Una successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è detta successioni di Cauchy se verifica la seguente condizione:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq \nu.$$

Osserviamo che ogni successione convergente risulta successione di Cauchy, ma risultato fondamentale è che ogni successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ (ed in particolare in $\mathbb{R}$) risulta convergente. Si dice dunque che $\mathbb{C}$ (ed $\mathbb{R}$) sono spazi metrici completi. Vale difatti

Teorema 1.1. (Criterio di Cauchy)
Una successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ è convergente se e solo se è successione di Cauchy.

Data un successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'n-esima somma parziale o ridotta n-esima:

$$s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione di tali somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene detta serie associata alla successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ o anche serie di termine generale a_k. Si definisce allora la somma degli infiniti termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come il limite per $n \to +\infty$ della successione delle somme parziali. Denoteremo tale limite con

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

e, con un abuso di terminologia, chiameremo tale limite serie o somma per k che va da 1 a $+\infty$ di a_k. Se il limite esiste finito in $\mathbb{C}$ diremo che la serie è convergente, in tal caso

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$$

ed il valore s viene detto somma della serie.

Vediamo ora la seguente condizione necessaria alla convergenza di una serie

Teorema 1.2. (condizione necessaria)
Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ risulta convergente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim. Indicata con $s \in \mathbb{C}$ la somma della serie e con s_n la ridotta n-esima della serie, dalla definizione per $n \to +\infty$ risulta

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

□

Come esempio notevole consideriamo la serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

Si può provare, per induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

e poichè

$$\lim_{n \to +\infty} z^n = 0 \quad \text{se e solo se} \quad |z| < 1$$

avremo che la serie data risulta convergente se e solo se $|z| < 1$ ed in tal caso risulta

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$

Osserviamo che dal Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie abbiamo

Teorema 1.3. (Criterio di Cauchy per le serie)
La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ risulta convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $\nu < n \leq m$ risulta

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon.$$

Data una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$, diremo che tale serie converge assolutamente se risulta convergente la serie reale a termini non negativi $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$. La convergenza assoluta implica la convergenza semplice, infatti

Proposizione 1.1. *Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ converge assolutamente allora risulta convergente in $\mathbb{C}$ e vale:*

$$|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|.$$

Dim. Poichè la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ risulta convergente, dal Criterio di Cauchy abbiamo che la successione delle somme parziali

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

risulta successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Osservato inoltre che, posto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

risulta

$$|s_n - s_p| = |\sum_{k=p+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=p+1}^{n} |a_k| = \sigma_n - \sigma_p \quad \forall p \leq n \in \mathbb{N},$$

avremo che anche la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ risulta successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ e dunque convergente.
Essendo inoltre $|s_n| \leq \sigma_n$ per ogni n, passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

□

Ad esempio, osserviamo che la serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$ risulta assolutamente convergente se $|z| < 1$.

Utilizzando il concetto di convergenza assoluta si ottengono i seguenti risultati che ci permetteranno di stabilire se una data serie risulta convergente. Abbiamo innanzitutto

TEOREMA 1.4. (CRITERIO DEL CONFRONTO)
Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ successioni tali che $|a_n| \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente).

DIM. La dimostrazione segue dal Teorema sulla convergenza assoluta di una serie e dal criterio del confronto per successioni reali. □

Ricordiamo alcune serie reali che potranno essere utilizzate come serie di confronto. Abbiamo già visto la serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

che risulta convergente se e solo se $|x| < 1$, altra serie notevole è la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

che risulta convergente solo se $p > 1$.

Dal criterio del confronto si ottengono i seguenti criteri

TEOREMA 1.5. (CRITERIO DEL RAPPORTO)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{C}$ tale che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell.$$

Allora, se $\ell < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente) mentre se $\ell > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge.

Dim. Dal criterio del rapporto per successioni reali positive abbiamo che se $\ell < 1$ allora esistono $\nu \in \mathbb{N}$, $A > 0$ e $0 < b < 1$ tali che $|a_n| \leq Ab^n$ per ogni $n \geq \nu$. Dal criterio del confronto per le serie, osservato che la serie geometrica reale $\sum_{n=1}^{+\infty} b^n$ converge, otteniamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente).
Se invece $\ell > 1$, preso $0 < \varepsilon < \ell - 1$, dalla definizione di limite avremo che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \ell - \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Essendo $\ell - \varepsilon > 1$, otteniamo che $|a_{n+1}| > |a_n|$ per ogni $n \geq \nu$ e dunque che la successione $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ risulta strettamente crescente per $n \geq \nu$. In particolare otteniamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima e dunque, dalla condizione necessaria alla convergenza, che la serie non converge. □

Si ha inoltre

Teorema 1.6. (Criterio della radice)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{C}$ tale che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1.$$

Allora, se $\ell < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente) mentre se $\ell > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge.

Dim. Se $\ell < 1$, sia $0 < \varepsilon < \ell - 1$. Dalla definizione di limite esiste allora $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < \ell + \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Posto $b = \ell + \varepsilon$, risulta $b \in (0, 1)$ e $0 \leq |a_n| < b^n$ per ogni $n \geq \nu$. Poichè la serie geometrica reale $\sum_{n=0}^{+\infty} b^n$ è convergente, dal criterio del confronto anche la serie data converge.
Se invece $\ell > 1$, preso $0 < \varepsilon < \ell - 1$, dalla definizione di limite sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} > \ell - \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Allora, essendo $\ell - \varepsilon > 1$ avremo che $|a_n| > 1$ per ogni $n \geq \nu$ e la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non sarà infinitesima. Per la condizione necessaria alla convergenza, la serie non converge. □

Riguardo alle operazioni tra serie, si può provare, utilizzando la definizione, che *se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ sono serie in $\mathbb{C}$ convergenti rispettivamente alle somme $a, b \in \mathbb{C}$, allora la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)$ risulta convergente alla somma $a + b$.* Possiamo inoltre provare

Teorema 1.7. (prodotto di serie)
Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ sono serie in $\mathbb{C}$ convergenti assolutamente rispettivamente alle somme $a, b \in \mathbb{C}$, allora la serie prodotto

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \textit{dove} \quad c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \tag{1}$$

converge al prodotto ab.

Se le serie risultano convergenti scriveremo allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} b_k := \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

dove i termini c_k sono definiti in (1).

Infine vediamo il concetto di riordinamento di una serie. Sia $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che l'applicazione $n \mapsto k_n$ risulti biunivoca da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$. Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e posto $\tilde{a}_n = a_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ è detta riordinamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vale allora il seguente risultato

TEOREMA 1.8. (RIORDINAMENTO DI UNA SERIE)
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie assolutamente convergente, allora ogni suo riordinamento $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ converge e converge alla medesima somma.

3. SERIE DI POTENZE

Consideriamo la serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Da quanto visto, tale serie converge (assolutamente) per $|z| < 1$ e non converge per $|z| \geq 1$. Inoltre, per ogni $|z| < 1$ risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

La precedente serie è un esempio di serie di potenze secondo la seguente definizione.

Data una successione di numeri complessi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, si dice serie di potenze di centro z_0 e coefficienti a_n la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2}$$

Chiaramente, una data serie di potenze risulta convergente a seconda della scelta di $z \in \mathbb{C}$. Diremo insieme di convergenza della serie di potenze (2) l'insieme $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ costituito da tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ per i quali la serie risulta convergente.

Riconosciamo la serie geometrica come particolare serie di potenze con $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $z_0 = 0$, per quanto visto l'insieme di convergenza di tale serie è il disco aperto $\mathcal{B}_1(0)$.

Nel seguito ci limiteremo a considerare serie di potenze della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{3}$$

con centro in $z_0 = 0$. Difatti a tale situazione ci si potrà sempre ricondurre mediante la sostituzione $w = z - z_0$.

Come primo risultato, notiamo che ogni serie di potenze della forma (3) risulta convergente nel suo centro, in quanto per $z = 0$ si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0$. Vale poi il seguente risultato

TEOREMA 1.9. (DI ABEL)
Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge per $z = z_0 \neq 0$ allora la serie converge (assolutamente) in ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |z_0|$.

DIM. Per ipotesi la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ risulta convergente e quindi, dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie, avremo che $a_n z_0^n \to 0$ per $n \to +\infty$ da cui, in particolare, che la successione $(|a_n z_0^n|)$ risulta limitata in $\mathbb{R}$.
Sia $M > 0$ tale che $|a_n z_0^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |z_0|$. Essendo $z_0 \neq 0$, otteniamo

$$0 \leq |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \frac{|z^n|}{|z_0^n|} = |a_n z_0^n| (\frac{|z|}{|z_0|})^n \leq M b^n$$

dove $b = \frac{|z|}{|z_0|}$. La serie $\sum_0^{+\infty} b^n$ è serie geometrica (reale) di ragione $b \in (0,1)$, essendo $|z| < |z_0|$, quindi convergente. Dal criterio del confronto deduciamo allora che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge (assolutamente). □

Data la serie di potenze (3), poniamo

$$\rho := \sup\{|z| \,|\, z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \, converge\}$$

Tale valore, eventualmente pari a $+\infty$, è detto raggio di convergenza della serie di potenze (3).
Dal precedente risultato otteniamo

TEOREMA 1.10. (SUL RAGGIO DI CONVERGENZA)
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, sia $\rho \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza. Allora:

- *(i) se $\rho = 0$, la serie converge solo per $z = 0$;*
- *(ii) se $\rho = +\infty$, la serie converge (assolutamente) in ogni $z \in \mathbb{C}$;*
- *(iii) se $\rho \in (0, +\infty)$, la serie converge (assolutamente) per $|z| < \rho$ e non converge per $|z| > \rho$.*

DIM. Poniamo

$$A = \{|z| \,|\, z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \, converge\}$$

e ricordiamo che per definizione $\rho = \sup A$.
(*i*) Per assurdo, supponiamo che esista $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ risulti convergente. Allora $|z| \in A$ e quindi, per definizione $\rho \geq |z| > 0$, contro l'ipotesi $\rho = 0$.
(*ii*) Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Essendo $\sup A = +\infty$, avremo che $|z|$ non è maggiorante di tale insieme e quindi che esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z| < |z_0|$ tale che $|z_0| \in A$ e quindi tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. Dal Teorema di Abel avremo allora che la serie converge (assolutamente) in z.
(*iii*) Sia $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \rho$. Dalla definizione del raggio di convergenza, avremo allora che $|z|$ non è maggiorante dell'insieme A, e quindi che esiste $z_0 \in \mathbb{R}$ con $|z| < |z_0|$ tale che $|z_0| \in A$ e dunque tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. Dal Teorema di Abel avremo allora che la serie converge (assolutamente) in z. Infine, sia $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \rho$. Dalla definizione del raggio di convergenza, avremo che $|z| \notin A$ e quindi che la serie non converge in z. □

Quindi, riguardo all'insieme di convergenza $\mathcal{B}$ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ di raggio di convergenza $\rho \in [0, +\infty]$ avremo:

i) se $\rho = 0$ allora $\mathcal{B} = \{0\}$;

ii) se $\rho = +\infty$ allora $\mathcal{B} = \mathbb{C}$;
iii) se $\rho \in (0, +\infty)$ allora $\mathcal{B}_\rho(0) \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}_\rho(0)$. Rimane dubbio il comportamento della serie nei punti della frontiera $\partial\mathcal{B}_\rho(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \rho\}$.

Esempi

• La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e non converge per $|z| = 1$ e quindi il disco aperto $\mathcal{B}_1(0)$ è il suo insieme di convergenza.

• La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}$, $x \in \mathbb{R}$, ha raggio di convergenza $\rho = 2$, converge per $x = -2$ e non converge per $x = 2$. L'intervallo $I = [-2, 2)$ è il suo insieme di convergenza.

• La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e converge (assolutamente) per $|z| = 1$, essendo tale la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Il disco chiuso $\overline{\mathcal{B}}_1(0)$ è il suo insieme di convergenza.

I prossimi risultati ci permetteranno di determinare il raggio di convergenza di una data serie di potenze.

Teorema 1.11. (Metodo del rapporto o di D'Alembert)
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora il raggio di convergenza della serie è

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

Dim. Per $z \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| = \ell|z|$$

Se $\ell = 0$ allora, dal criterio del rapporto la serie converge (assolutamente) per ogni $z \in \mathbb{C}$ e dunque $\rho = +\infty$.
Se $\ell = +\infty$ allora la serie non converge in ogni $z \neq 0$ e quindi $\rho = 0$.
Se $\ell \in (0, +\infty)$, dal criterio del rapporto la serie converge (assolutamente) per $\ell|z| < 1$, ovvero per $|z| < 1/\ell$, e non converge per $\ell|z| > 1$, ovvero per $|z| > 1/\ell$. Dal Teorema di Abel ne deduciamo che in questo caso $\rho = 1/\ell$. □

Ad esempio, data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n n^2}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n n^2}{3^{n+1}(n+1)^2} = \frac{1}{3}$$

quindi, dal precedente teorema, la serie ha raggio di convergenza $\rho = 3$.

Utilizzando il criterio della radice si può provare, in modo analogo, il seguente risultato.

TEOREMA 1.12. (METODO DELLA RADICE O DI CAUCHY-HADAMARD)
Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty]$$

allora il raggio di convergenza della serie è

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

Ad esempio, data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n^2}}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

quindi, dal precedente teorema, la serie ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$.

4. SVILUPPI IN SERIE DI POTENZE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Ricordiamo che data una funzione reale $f(x)$ derivabile infinite volte in $(a, b) \subset \mathbb{R}$, per ogni $x_0 \in (a, b)$ possiamo considerarne la serie di Taylor associata

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Osserviamo che una serie di Taylor è un caso particolare di serie di potenze su cui possiamo testare la precedente teoria. Osserviamo inoltre che la serie di Taylor relativa a $f(x)$ risulta convergente ad $f(x)$ se e solo se il resto $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ tende a zero per $n \to +\infty$, dove $P_n(x)$ è il polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine n e centro x_0. Per quanto visto nel corso di Analisi Matematica 1, per qualche ξ compreso tra x e x_0 risulta

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \textit{Resto di Lagrange.}$$

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è un esempio di funzione derivabile infinite volte per la quale la corrispondente serie di Taylor con centro $x_0 = 0$ non converge ad $f(x)$ eccetto che in $x_0 = 0$. Infatti risulta $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile reale abbiamo i seguenti sviluppi in serie di Taylor centrati in $x_0 = 0$.

• *Funzione esponenziale*: per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Infatti, dalla formula di Taylor con resto di Lagrange, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste ξ_n compreso tra 0 e x tale che

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| = |\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}| \leq \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e poichè $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ per $n \to +\infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, avremo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge a e^x per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che il raggio di convergenza di tale serie è $\rho = +\infty$, infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

• *Funzioni seno e coseno*: come nel precedente caso, utilizzando la formula di Taylor con resto di Lagrange, si può provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + ... \text{ e } \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

dove nuovamente il raggio di convergenza delle serie è $\rho = +\infty$.

• *Funzione logaritmo*: per ogni $|x| < 1$ risulta

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

Infatti, ricordando che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1,$$

sostituendo x con $-x$ si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}, \quad x \neq -1,$$

Integrando tra 0 e x, per $x > -1$, si ottiene

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt$$

Dunque

$$|\log(1+x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}| = |\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt| \leq \max\{1, \frac{1}{1+x}\} \frac{|x|^{n+2}}{n+2}$$

Se $-1 < x \leq 1$ avremo che $\frac{|x|^{n+2}}{n+2} \to 0$ per $n \to +\infty$, e dunque che la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ converge a $\log(1+x)$ per ogni $-1 < x \leq 1$. Osserviamo che il raggio di convergenza della serie è pari a 1 essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

• *Funzione arcotangente*: con ragionamento analogo al precedente esempio, osservato che

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

integrando si ottiene che per ogni $-1 < x \leq 1$ risulta

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

• *Serie binomiale*: per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e ogni $|x| < 1$ risulta

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

dove

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

Vediamo ora come dai precedenti sviluppi seguono gli sviluppi di e^z, $\sin z$ e $\cos z$, $\cosh z$ e $\sinh z$ con $z \in \mathbb{C}$.

Dai precedenti sviluppi e dalla definizione di esponenziale complesso si ottiene che

$$\begin{aligned} e^{ib} = \cos b + i \sin b &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{b^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^k}{k!} \end{aligned}$$

inoltre, dal Teorema sul prodotto di serie si ha

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

dove

$$c_k = \sum_{n=0}^{k}\frac{a^n}{n!}\frac{(ib)^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}a^n(ib)^{k-n} = \frac{(a+ib)^k}{k!}.$$

Dunque per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ed il raggio di convergenza della serie è $\rho = +\infty$.

Dal precedente sviluppo e dalla definizione di seno e coseno complessi segue che

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((iz)^k + (-iz)^k)$$

ed osservato che $(iz)^{2k} + (-iz)^{2k} = 2(-1)^k z^{2k}$ mentre $(iz)^{2k+1} + (-iz)^{2k+1} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

In modo analogo si ottiene

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Abbiamo inoltre

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((z)^k + (-z)^k)$$

ed osservato che $(z)^{2k} + (-z)^{2k} = 2z^{2k}$ mentre $(z)^{2k+1} + (-z)^{2k+1} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Analogalmente si prova che

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Vediamo infine alcuni esempi di come, dai precedenti sviluppi e dalla proprietà delle serie, è possibile dedurre lo sviluppo in serie di potenze di alcune funzioni.

• Determiniamo lo sviluppo in potenze di z della funzione $\frac{e^{z^2}}{z}$. Dallo sviluppo di e^z otteniamo

$$e^{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}$$

da cui per $z \neq 0$

$$\frac{e^{z^2}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{k!}.$$

• Determiniamo lo sviluppo in potenze di z della funzione $\frac{1-\cos z}{z^2}$. Dallo sviluppo di $\cos z$ otteniamo

$$1-\cos z = 1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

da cui per $z \neq 0$

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-2}}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(n+1)!}.$$

• Determiniamo lo sviluppo in serie di potenze di centro $z_0 = 2$ della funzione $\frac{z-1}{z}$. Ricordando che

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k, \quad \forall |z| < 1,$$

otteniamo

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{z-2}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^k$$

per ogni $|\frac{z-2}{2}| < 1$ ovvero per $|z-2| < 2$. Ne segue allora che per $|z-2| < 2$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z} &= \frac{z-2}{z} + \frac{1}{z} = (z-2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^k \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(z-2)^n\end{aligned}$$

e poichè $\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$, ne concludiamo

$$\frac{z-1}{z} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^n.$$

• Determiniamo lo sviluppo in serie di potenze di centro $z_0 = \pi i$ della funzione $(z-\pi)e^z$. Dallo sviluppo di e^z e dalle proprietà dell'esponenziale, essendo $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, otteniamo

$$e^z = e^{z-\pi i}e^{\pi i} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^k}{k!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ne segue allora che per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta

$$\begin{aligned}
(z-\pi)e^z &= -(z-\pi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^k}{k!} \\
&= \pi(1-i)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^k}{k!} - (z-\pi i)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^k}{k!} \\
&= \pi(1-i)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{k+1}}{k!} \\
&= \pi(1-i) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi(1-i)}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right)(z-\pi i)^n \\
&= \pi(1-i) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(1-i)-n}{n!}(z-\pi i)^n.
\end{aligned}$$

CAPITOLO 2

Funzioni di variabile complessa

1. Limiti e continuità

Sia $f(z)$ una funzione complessa definita in $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto di accumulazione per Ω. Diciamo che $f(z)$ ha per limite $\ell \in \mathbb{C}$ per $z \to z_0$, e scriveremo $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $0 < |z - z_0| < \delta$, $z \in \Omega$.

Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ e ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, potremo scrivere $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, dove $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rappresentano rispettivamente la parte reale e immaginaria di $f(z)$. Allora posto $z_0 = x_0 + iy_0$, avremo

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell = a + ib \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$$

ed i risultati sui limiti di funzioni di due variabili reali (unicità, algebra, ecc.) potranno estendersi ai limiti di funzioni di variabile complessa.

Inoltre, se $f(z)$ è funzione complessa definita in un insieme illimitato $\Omega \subset \mathbb{C}$, diremo che $f(z)$ tende al limite $\ell \in \mathbb{C}$ per $|z| \to +\infty$, $z \in \Omega$, e scriveremo $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = \ell$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $|z| > R$, $z \in \Omega$.

Diremo che una funzione complessa $f(z)$ definita in $\Omega \subset \mathbb{C}$ è continua in $z_0 \in \Omega$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ per ogni $|z - z_0| < \delta$. Osserviamo che dalla definizione di limite, se $z_0 \in \Omega$ è punto di accumulazione per Ω allora $f(z)$ risulta continua in z_0 se e solo se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Riconosciamo nuovamente che, posto $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, avremo che $f(z)$ risulta continua in $z_0 = x_0 + iy_0$ se e solo se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ risultano continue in (x_0, y_0).

Ad esempio, le funzioni $f(z) = \bar{z}$ e $f(z) = z^2$ risultano continue in ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ essendo continue in $\mathbb{R}^2$ rispettivamente le funzioni $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = -y$ e $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. Risulta continua in $\mathbb{C}$ la funzione $f(z) = e^z$ essendo

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

e le funzioni $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \sin y$ continue in $\mathbb{R}^2$.

Poichè si ha che *somma, differenza, composizione, prodotto e quoziente di funzioni continue risultano continue nel loro dominio* avremo che risultano continue tutte le potenze $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, i polinomi, i rapporti di polinomi nel loro dominio, le funzioni seno e coseno.
La funzione $f(z) = \operatorname{Arg} z$ risulta continua in $\mathbb{C}$ eccetto nei punti del semiasse reale negativo in quanto se $x < 0$ per $y \to 0^{\pm}$ risulta $\operatorname{Arg}(x+iy) \to \pm\pi$. Ne segue che la funzione logaritmo principale risulta anch'essa continua in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eccetto che nei punti del semiasse reale negativo.

2. Successioni e serie di funzioni complesse

Consideriamo una successione di funzioni $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ definite in un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si dice che la successione converge puntualmente o semplicemente alla funzione limite $f(z)$ se per ogni $z \in \Omega$ risulta $f_n(z) \to f(z)$ per $n \to +\infty$, ovvero se per ogni $z \in \Omega$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ (dipendente da z e ε) tale che per ogni $n \geq \nu$ risulta $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Ad esempio, abbiamo che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ converge alla funzione nulla $f(z) = 0$ in $\mathcal{B}_1(0)$.

Ci si chiede se le proprietà delle funzioni $f_n(z)$ vengono ereditate dalla funzione limite $f(z)$. Ad esempio consideriamo la successione di funzioni reali continue $f_n(x) = x^n$. Tale successione converge puntualmente nell'intervallo $[0,1]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

che non risulta continua in $x_0 = 1$. La condizione di convergenza puntuale non è dunque sufficiente per garantire la continuità della funzione limite.

Introduciamo la seguente condizione di convergenza. Diremo che una successione di funzione $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente alla funzione limite $f(z)$ in $\Omega \subset \mathbb{C}$ se la condizione $f_n(z) \to f(z)$ per $n \to +\infty$ è verificata "uniformemente" in Ω, ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ (dipendente solo da ε) tale che per ogni $z \in \Omega$ e ogni $n \geq \nu$ risulta $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Osserviamo che se una successione converge uniformemente in $\Omega \subset \mathbb{C}$ allora la successione risulta convergente puntualmente in Ω. Vale allora il seguente risultato

Teorema 2.1. (sulla continuità della funzione limite)
Sia $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni continue uniformemente convergente alla funzione limite $f(z)$ in $\Omega \subset \mathbb{C}$. Allora $f(z)$ risulta continua in Ω.

Dim. Preso $z_0 \in \Omega$ arbitrario, proviamo che $f(z)$ risulta continua in z_0. Per ogni $\varepsilon > 0$, dalla convergenza uniforme di $f_n(z)$ a $f(z)$ in Ω, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $n \geq \nu$ e ogni $z \in \Omega$. Poichè $f_\nu(z)$ risulta continua in z_0, esiste $\delta > 0$ (dipendente da ε e da ν) tale che se $z \in \Omega$ e $|z - z_0| < \delta$ allora $|f_\nu(z) - f_\nu(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Allora per ogni $z \in \Omega$ con $|z - z_0| < \delta$ risulta

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_\nu(z)| + |f_\nu(z) - f_\nu(z_0)| + |f_\nu(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

e dunque che $f(z)$ risulta continua in z_0. $\square$

Introduciamo infine analoghi concetti di convergenza per serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.
Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente (risp. uniformemente) alla somma $S(z)$ in Ω se la successione delle somme parziali $s_k(z) = \sum_{n=0}^{k} f_n(z)$ converge puntualmente (risp. uniformemente) a $S(z)$ in Ω.

Osserviamo che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è serie di funzioni continue $f_n(z) = a_n z^n$, convergente puntualmente (e assolutamente) nel disco di convergenza $\mathcal{B}_\rho(0)$, essendo $\rho > 0$ il raggio di convergenza della serie. Vale inoltre il seguente risultato

Teorema 2.2. (convergenza uniforme delle serie di potenze)
Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze e sia $\rho > 0$ il suo raggio di convergenza. Allora per ogni $0 < r < \rho$, la serie converge uniformemente in $\overline{\mathcal{B}}_r(0)$.

Dim. Detta $A(z)$ la somma della serie, ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$A(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n z^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n$$

e poichè la serie converge avremo che il resto k-esimo, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n$, è infinitesimo per $k \to +\infty$. Abbiamo inoltre che per ogni $|z| \leq r$ e ogni $k \in \mathbb{N}$

$$|A(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n z^n| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Essendo $r < \rho$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge assolutamente, quindi $\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| r^n \to 0$ per $k \to +\infty$ e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} |a_n| r^n < \varepsilon$$

Allora per ogni $|z| < r$ e ogni $k \geq \nu$ risulta $|A(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n z^n| < \varepsilon$, ovvero la serie converge uniformemente ad $A(z)$ in $\overline{\mathcal{B}}_r(0)$. $\square$

Dal precedente risultato e dal Teorema 2.1 si ha dunque che la somma di una serie di potenze risulta funzione continua nel disco di convergenza.

3. Funzioni olomorfe

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto ed $f(z)$ una funzione complessa definita in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si dice che $f(z)$ è olomorfa o derivabile (in senso complesso) in $z_0 \in \Omega$ se esiste finito il limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Denoteremo tale limite con $f'(z_0)$ e lo chiameremo derivata (complessa) di $f(z)$ in z_0. Se $f(z)$ è olomorfa in ogni $z_0 \in \Omega$ diremo che $f(z)$ è funzione olomorfa in Ω e scriveremo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Ad esempio, la funzione costante $f(z) = a$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta olomorfa in $\mathbb{C}$ con $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ in quanto risulta

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

La funzione $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, risulta anch'essa olomorfa in $\mathbb{C}$ con $f'(z) = nz^{n-1}$, infatti per ogni $h \in \mathbb{C}$, dall'identità $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + ... + b^{n-2}a + b^{n-1})$, risulta

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + ... + z^{n-1}$$

e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \to nz^{n-1}.$$

Osserviamo ora che la condizione

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}.$$

può essere riscritta come

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f'(z_0)w + o(|w|), \quad \text{per } w \to 0.$$

Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, e ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, potremo pensare alla funzione $f(z) = f(x + iy)$ come funzione di due variabili reali (a valori complessi) che denoteremo, per semplicità, con $f(x, y)$. La precedente relazione mostra che, come funzione delle due variabili reali x e y, la funzione olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$ risulta differenziabile [1] in (x_0, y_0) essendo

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f'(z_0)(h + ik) + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \\ &= f(x_0, y_0) + f'(z_0)h + if'(z_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}). \end{aligned}$$

Ne segue in particolare che $f(x, y)$ risulta derivabile parzialmente in (x_0, y_0) con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = if'(z_0)$$

e dunque vale la relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \tag{4}$$

[1] Ricordiamo che una funzione definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a valori reali o complessi è detta differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ se esistono due costanti A, B reali (o complesse) tali che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad \text{per } (h, k) \to (0, 0)$$

In tal caso $f(x, y)$ risulta derivabile parzialmente in (x_0, y_0) con

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Viceversa, se $f(x,y)$ è funzione delle due variabili reali x e y differenziabile in (x_0,y_0) per cui risulta verificata la condizione (4), posto $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w = h + ik$, risulta

$$\begin{aligned} f(z_0+w) &= f(x_0+h, y_0+k) \\ &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \\ &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(h+ik) + o(\sqrt{h^2+k^2}) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)w + o(|w|). \end{aligned}$$

e la funzione di variabile complessa $f(z) = f(x+iy) = f(x,y)$ risulta olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$ con

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Abbiamo dunque provato il seguente risultato

PROPOSIZIONE 2.1. *Una funzione $f(z)$ risulta olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ se e solo se, considerata come funzione di due variabili reali $f(x,y) = f(x+iy)$, risulta differenziabile in (x_0,y_0) e vale (4).*

Ad esempio, la funzione $f(z) = e^z$ risulta olomorfa in $\mathbb{C}$ con $f'(z) = e^z$. Infatti, come funzione di due variabili reali $f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$ risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e soddisfa la condizione (4):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x(\cos y + i\sin y) + i[e^x(-\sin y + i\cos y)] = 0$$

dunque

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$$

La funzione $f(z) = \bar{z}$ non risulta invece olomorfa in $\mathbb{C}$ in quanto $f(z) = f(x+iy) = x - iy$ risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2$ ma non soddisfa la condizione (4):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + i[-i] = 2 \neq 0$$

Osserviamo inoltre che denotate con $u(x,y)$ e $v(x,y)$ rispettivamente la parte reale e immaginaria di $f(x+iy)$:

$$f(x+iy) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

tali funzioni risultano a valori reali e dal precedente risultato abbiamo che $f(z)$ risulta olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$ se e solo se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ risultano differenziabili in (x_0,y_0) e, dalla condizione (4), verificano

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

ovvero verificano le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{5}$$

Abbiamo dunque che

COROLLARIO 2.1. *Una funzione $f(z)$ risulta olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ se e solo se la sua parte reale $u(x, y)$ e immaginaria $v(x, y)$ risultano differenziabili in (x_0, y_0) e verificano le condizioni di Cauchy-Riemann (5).*

Vediamo ora alcune proprietà delle funzioni olomorfe derivanti dalle precedenti considerazioni. Dalla definizione è immediato verificare che *se $f(z)$ è olomorfa in z_0 allora $f(z)$ è continua in z_0.*
Dai precedenti risultati e dai Teoremi sulle funzioni differenziabili segue inoltre

COROLLARIO 2.2. *Se $f(z)$ è olomorfa nell'aperto connesso Ω con $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$ allora $f(z)$ risulta costante in Ω.*

Dal precedente risultato segue in particolare

COROLLARIO 2.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è aperto connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ è tale che $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ allora $f(z)$ è costante in Ω.*

DIM. Difatti, denotate con $u(x, y)$ e $v(x, y)$ rispettivamente la parte reale e immaginaria di $f(x + iy)$, se $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ dovrà essere $v(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \Omega$. Se $f(z)$ risulta olomorfa in Ω dai precedenti risultati si avrà

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \forall\, x + iy \in \Omega$$

Essendo Ω aperto connesso, avremo allora che $f(z)$ risulta costante in Ω. □

Ad esempio, osserviamo che la funzione $f(z) = |z|$ non risulta olomorfa in $\mathbb{C}$ in quanto $f(z) = f(x+iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$ risulta differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ma non soddisfa la condizione (4):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

A tale conclusione potevamo arrivare utilizzando il precedente risultato osservato che $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ ma che la funzione non è costante in $\mathbb{C}$.

Abbiamo infine che somma, prodotto, quoziente e composizione di funzioni olomorfe risultano olomorfe e che valgono le usuali regole di derivazione:

TEOREMA 2.3. *Se $f(z)$ e $g(z)$ sono olomorfe in $z_0 \in \Omega$ allora*

- *$(f + g)(z)$ è olomorfa in z_0 e $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;*
- *$(fg)(z)$ è olomorfa in z_0 e $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;*
- *se $g(z_0) \neq 0$ allora $\dfrac{f}{g}(z)$ è olomorfa in z_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Inoltre, se $f(z)$ è olomorfa in $z_0 \in \Omega$ e $g(z)$ è olomorfa in $f(z_0)$ allora $(gof)(z)$ è olomorfa in z_0 e

$$(gof)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Ne segue ad esempio che le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ risultano olomorfe in $\mathbb{C}$ con $(\sin z)' = \cos z$ e $(\cos z)' = -\sin z$, infatti dalla definizione si ha

$$(\cos z)' = (\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2})' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

Analogalmente,

$$(\sin z)' = (\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i})' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

Allo stesso modo possiamo provare che $(\cosh z)' = \sinh z$ e che $(\sinh z)' = \cosh z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Abbiamo inoltre

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $g : B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in $w_0 \in B$ e $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un'* inversa destra *continua di $g(w)$, ovvero $f(A) \subset B$ e $g(f(z)) = z$ per ogni $z \in A$, tale che $f(z_0) = w_0$. Se $g'(w_0) \neq 0$ allora $f(z)$ è olomorfa in z_0 e*

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}.$$

Ad esempio, $f(z) = \operatorname{Log} z$ è inversa destra continua in $A = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \neq 0 \text{ se } Re(z) \leq 0\}$ della funzione olomorfa $g(z) = e^z$, essendo $e^{\operatorname{Log} z} = z$ per ogni $z \neq 0$. Dunque $f(z) = \operatorname{Log} z$ risulta olomorfa in A con

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))} = \frac{1}{e^{\operatorname{Log} z}} = \frac{1}{z}.$$

Infine si può provare

PROPOSIZIONE 2.3. *Se $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è derivabile in $t_0 \in (a, b)$ e $f(z)$ è olomorfa in $\gamma(t_0)$ allora $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ è derivabile in t_0 e*

$$\Gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0).$$

Utilizzando il precedente risultato possiamo dare il seguente significato geometrico di una funzione olomorfa. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω e sia $z_0 \in \Omega$ tale che $f'(z_0) \neq 0$. Consideriamo due curve regolari $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ passanti per $z_0 \in \Omega$:

$$\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2),$$

Posto $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ e $\Gamma_2(t) = f(\gamma_2(t))$, avremo che Γ_1 e Γ_2 risultano curve passanti per $f(z_0)$ e dalla precedente proposizione abbiamo

$$\Gamma_1'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad \Gamma_2'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2) \neq 0$$

e dunque

$$\arg \Gamma_1'(t_1) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(t_1) \quad \text{e} \quad \arg \Gamma_2'(t_2) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(t_2).$$

Ne segue quindi che

$$\arg \Gamma_1'(t_1) - \arg \Gamma_2'(t_2) = \arg \gamma_1'(t_1) - \arg \gamma_2'(t_2)$$

ovvero che se $f'(z) \neq 0$ in Ω, $f(z)$ *induce una trasformazione di* Ω *su* $f(\Omega)$ *che preserva gli angoli tra curve*, diremo che $f(z)$ induce una trasformazione conforme.

Concludiamo provando che la somma di una serie di potenze risulta funzione olomorfa nel disco di convergenza. Vale difatti

TEOREMA 2.4. (SULLA SERIE DERIVATA)
Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie di potenze di raggio di convergenza* $\rho > 0$ *e sia* $A(z)$ *la sua somma. Allora* $A(z)$ *risulta olomorfa in* $B_\rho(0)$ *e la* serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *ha raggio di convergenza* ρ *e per somma* $A'(z)$*:*

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \forall\, |z| < \rho.$$

DIM. Proviamo innanzitutto che la serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ha raggio di convergenza ρ. Infatti, sia ρ' il suo raggio di convergenza. Se $|z| < \rho'$ allora per definizione la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n z^{n-1}|$ risulta convergente e poichè

$$|a_n z^n| = |z||a_n z^{n-1}| \leq |n a_n z^{n-1}|, \quad \forall\, n \geq |z|,$$

dal criterio del confronto segue che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ risulta convergente e dunque che $|z| \leq \rho$. Si ha allora che $\rho' \leq \rho$.
Viceversa, sia $|z| < \rho$, preso $w \in \mathbb{C}$ con $|z| < |w| < \rho$ risulta

$$|n a_n z^{n-1}| = n|a_n| \left|\frac{z}{w}\right|^{n-1} |w|^{n-1} = \left(\frac{n}{|w|} \left|\frac{z}{w}\right|^{n-1}\right) |a_n w^n|.$$

Poichè, essendo $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, risulta $\frac{n}{|w|} \left|\frac{z}{w}\right|^{n-1} \to 0$ per $n \to +\infty$, avremo che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n}{|w|} \left|\frac{z}{w}\right|^{n-1} < 1 \quad \text{per ogni } n \geq \nu.$$

Allora, per $n \geq \nu$ risulta

$$|n a_n z^{n-1}| < |a_n w^n|$$

e poichè $|w| < \rho$, la serie $\sum_{n \geq 0} |a_n w^n|$ risulta convergente e dunque, dal criterio del confornto, sarà tale anche la serie $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$. Ne segue allora che $|z| \leq \rho'$ da cui $\rho \leq \rho'$.

Denotiamo ora con $B(z)$ la somma della serie derivata e proviamo che per ogni $|z| < \rho$ risulta $A'(z) = B(z)$. Fissato $z \in B_\rho(0)$ e $h \neq 0$ tale che $z + h \in B_\rho(0)$ abbiamo

$$\frac{A(z+h) - A(z)}{h} - B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right).$$

Abbiamo

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} = (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-2}(z+h) + z^{n-1} - n z^{n-1}$$

e dunque, posto $r = \max\{|z|, |z+h|\}$ otteniamo che

$$|a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right)| \leq 2n|a_n| r^{n-1}.$$

Poichè $r < \rho$ e la serie derivata ha raggio di convergenza ρ, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ risulta convergente. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia allora $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Allora dalla precedente identità otteniamo

$$|\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - B(z)| \leq |P(h)| + 2\sum_{n=\nu+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq |P(h)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

dove

$$P(h) = \sum_{n=1}^{\nu} a_n[(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + ... + z^{n-2}(z+h) + z^{n-1} - nz^{n-1}]$$

è polinomio in h nullo per $h = 0$. Avremo allora che per h sufficientemente piccolo risulta $|P(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e dunque

$$|\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - B(z)| < \varepsilon$$

Segue quindi che

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(z+h)-A(z)}{h} = B(z)$$

ovvero che $A(z)$ è olomorfa con $A'(z) = B(z)$. □

Poichè la serie derivata di una serie di potenze è serie di potenze con medesimo raggio di convergenza, applicando iterativamente il precedente risultato otteniamo

Corollario 2.4. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$ e sia $A(z)$ la sua somma. Allora $A(z)$ risulta derivabile infinite volte in $B_\rho(0)$ con*

$$A^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n z^{n-k}, \quad \forall\, |z| < \rho, \quad k \geq 1.$$

ed in particolare risulta

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}, \quad \forall\, k \geq 0.$$

Utilizzando i precedenti risultati possiamo ottenere lo sviluppo in serie di potenze di alcune funzioni, derivate di somme di serie di potenze e viceversa, calcolare la somma di alcune serie di potenze. Vediamo alcuni esempi.

• Determinare lo sviluppo in serie di potenze di centro $z_0 = 0$ della funzione $A(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ e calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Osservato che $\frac{1}{(1-z)^2} = (\frac{1}{1-z})'$ e che

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall |z| < 1,$$

dal Teorema sulla serie derivata otteniamo

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}, \quad \forall |z| < 1.$$

Ne segue allora che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} A(\frac{1}{2}) = 2$$

• Determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$. Abbiamo che la serie ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e che per $|z| < 1$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

Essendo $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, per ogni $|z| < 1$, dai precedenti risultati otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = (\frac{1}{1-z})' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = (\frac{1}{1-z})'' = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{2z}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Una funzione $f(z)$ è detta analitica in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, e scriveremo $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, se risulta localmente sviluppabile in serie di potenze, ovvero se per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste $\rho(z_0) > 0$ e una successione $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_{\rho(z_0)}(z_0).$$

Dai precedenti risultati abbiamo allora che ogni funzione analitica risulta olomorfa ed inoltre

Corollario 2.5. *Se $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, allora $f(z)$ è derivabile infinite volte in Ω. Inoltre se*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathcal{B}_{\rho(z_0)}(z_0).$$

allora

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}, \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_{\rho(z_0)}(z_0), \quad k \geq 1.$$

In particolare

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \forall\, k \geq 0$$

e dunque $f(z)$ risulta sviluppabile in serie di Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B_{\rho(z_0)}(z_0).$$

Proveremo nelle prossime sezioni che ogni funzione olomorfa risulta analitica, dunque sviluppabile localmente in serie di potenze. Dal precedente risultato avremo quindi che ogni funzione olomorfa risulta derivabile infinite volte e sviluppabile in serie di Taylor.

4. Integrazione lungo curve

Data una funzione $\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diremo che $\varphi(t)$ è integrabile secondo Rieman in $[a,b]$ se tali risultano essere la sua parte reale e immaginaria e poniamo

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt := \int_a^b Re(\varphi(t))\,dt + i\int_a^b Im(\varphi(t))\,dt.$$

Dai risultati sull'integrale di Riemann per funzioni reali, abbiamo che l'integrale soddisfa le proprietà di linearità e di additività. Si può inoltre provare che *se $\varphi(t)$ è integrabile in $[a,b]$ allora è tale anche $|\varphi(t)|$ e vale*

$$|\int_a^b \varphi(t)\,dt| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Abbiamo inoltre che *ogni funzione continua in $[a,b]$ risulta integrabile in $[a,b]$* e vale la formula fondamentale del calcolo integrale: *se $\varphi(t)$ è funzione derivabile con derivata continua in $[a,b]$ allora*

$$\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Vale inoltre

Teorema 2.5. (di passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Sia $(\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue uniformemente convergente in $[a,b]$ alla funzione $\varphi(t)$. Allora*

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,dt.$$

Dim. Dalle proprietà dell'integrale si ha

$$|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt| \leq \int_a^b |\varphi_n(t)-\varphi(t)|\,dt \leq (b-a)\max_{t\in[a,b]}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|$$

ma poichè $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ uniformemente in $[a,b]$ risulta $\max_{t\in[a,b]}|\varphi_n(t)-\varphi(t)| \to 0$ per $n \to +\infty$ e dunque la tesi. □

Osserviamo che la condizione di convergenza uniforme è condizione necessaria, ad esempio la successione

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2n^2 t & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2n} \\ -2n^2 t + 2n & \text{se } \frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

converge puntualmente (ma non uniformemente) alla funzione identicamente nulla in $[0,1]$ mentre $\int_0^1 \varphi_n(t)\,dx = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Vediamo ora il concetto di integrale curvilineo per funzioni a variabile complessa. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^1$ con sostegno γ contenuto in Ω e una funzione $f(z)$ continua in Ω, l'integrale di $f(z)$ lungo la curva γ è definito da

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

In particolare, se $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, allora $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ e

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)dt + \\ &\quad + i\int_a^b u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t))dt \\ &= \int_\gamma E \cdot ds + i\int_\gamma E^\perp \cdot ds\end{aligned}$$

dove abbiamo denotato con E e $E^\perp$ i campi vettoriali

$$E(x, y) = (u(x, y), -v(x, y)) \quad \text{e} \quad E^\perp(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$$

e abbiamo pensato a γ come curva in $\mathbb{R}^2$. L'integrale lungo una curva di una funzione a variabile complessa può quindi essere visto come integrale di un campo vettoriale e dunque le proprietà di questi ultimi potranno essere estesi agli integrali ora introdotti. Ricordiamo brevemente tali proprietà.

Osserviamo innanzitutto che se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sono curve equivalenti tali che $\gamma(a) = \varphi(\alpha)$ e $\gamma(b) = \varphi(\beta)$, ovvero se esiste un'applicazione crescente $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ per ogni $t \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau$$

e dunque che $\int_\gamma f(z)\, dz$ non dipende dalla parametrizzazione scelta della curva γ (a meno del verso di percorrenza). In particolare, denotata con $-\gamma$ la curva γ percorsa con verso opposto, risulta

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$

Inoltre, vale

$$|\int_\gamma f(z)dz| \le \int_\gamma |f(z)|ds \le L(\gamma)\sup\{|f(z)|\,|\, z \in \gamma\}$$

dove $\int_\gamma |f(z)|ds$ è l'integrale curvilineo della funzione a valori reali $|f(z)|$ e $L(\gamma) := \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt$ è la lunghezza della curva γ (essendo $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ una parametrizzazione della curva γ).

Valgono inoltre le proprietà di linearità e di additività dell'integrale: se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni continue in $\Omega \subset \mathbb{C}$ e γ è curva di classe $\mathcal{C}^1$ con sostegno in Ω allora

$$\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$$

Se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ è curva di classe $\mathcal{C}^1$ in Ω e $f(z)$ è funzione continua in Ω allora

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Utilizzando la proprietà di additività possiamo estendere la definizione di integrale curvilineo lungo curve di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, ponendo

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz,$$

essendo $\gamma = \cup_{k=1}^{n} \gamma_k$ e γ_k curve di classe $\mathcal{C}^1$.

Vediamo alcuni esempi.

• Calcoliamo $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ essendo γ la curva avente per sostegno la frontiera di $\mathcal{B}_1(0)$ percorsa una sola volta in senso antiorario. Una parametrizzazione della curva è data da $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Essendo $\overline{\gamma(t)} = \cos t - i \sin t = e^{-it}$ e $\varphi'(t) = ie^{it}$ abbiamo

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

• Calcoliamo $\int_\gamma Im(z)\, dz$ essendo γ la curva avente per sostegno la frontiera del triangolo chiuso Δ di vertici $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = i$ percorsa una sola volta in senso antiorario. Abbiamo che $\gamma = s_1 \cup s_2 \cup s_3$ essendo $s_1 = \{t,\, t \in [0, 1]\}$, $s_2 = \{(1-t) + it, t \in [0, 1]\}$ e $s_3 = \{(1-t)i,\, t \in [0, 1]\}$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma Im(z)\, dz &= \int_{s_1} Im(z)\, dz + \int_{s_2} Im(z)\, dz + \int_{s_3} Im(z)\, dz = \\ &= \int_0^1 t(-1+i)\, dt + \int_0^1 (1-t)(-i)\, dt \\ &= \left[\frac{i-1}{2}t^2 + i(\frac{t^2}{2} - t)\right]_0^1 = -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

• Calcoliamo $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ essendo γ la curva avente per sostegno la frontiera di $\mathcal{B}_r(0)$ percorsa k volte in senso antiorario. Una parametrizzazione della curva è data da $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2k\pi]$. Allora

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2k\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\, dt = 2k\pi i$$

Dal Teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale e dalla definizione di integrale curvilineo segue inoltre

TEOREMA 2.6. (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE CURVILINEO)
Sia $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzione continue in $\Omega \subset \mathbb{C}$ uniformemente convergente a $f(z)$ in Ω. Allora, per ogni curva γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno contenuto in Ω risulta

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Da cui in particolare si ottiene

COROLLARIO 2.6. (INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE)
Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(z)$ serie di funzioni continue in $\Omega \subset \mathbb{C}$ uniformemente convergente alla somma $S(z)$ in Ω . Allora, per ogni curva γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno contenuto in Ω risulta

$$\int_\gamma S(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Vale inoltre il seguente risultato che estende agli integrali curvilinei il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

TEOREMA 2.7. (TEOREMA FONDAMENTALE PER L'INTEGRALE CURVILINEO)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ insieme aperto, $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F' \in \mathcal{C}(\Omega)$ e sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno γ in Ω. Allora,

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

DIM. La dimostrazione è immediata, osservato che per definizione

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

e che, per la Proposizione 2.3, $F'(\varphi(t))\varphi'(t)$ è la derivata della funzione composta $F(\varphi(t))$. Dunque

$$\int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

Ad esempio, calcoliamo $\int_\gamma \cos z\,dz$ essendo γ la curva di parametrizzazione $\varphi(t) = te^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Poichè $\varphi(2\pi) = 2\pi$ e $\varphi(0) = 0$ e che $(\sin z)' = \cos z$ otteniamo

$$\int_\gamma \cos z\,dz = \sin(2\pi) - \sin 0 = 0$$

Come applicazione dei precedenti risultati proviamo che, denotata con $\mathcal{C}_r(z_0)$ la curva avente per sostegno la frontiera $\partial\mathcal{B}_r(z_0)$ percorsa una sola volta in senso antiorario (una parametrizzazione di tale curva sarà ad

esempio data da $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$), per ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$ risulta

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{dw}{w-z}\, dw = 2\pi i \tag{6}$$

Infatti, si ha

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{dw}{w-z} = \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\, dw$$

ed essendo $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ per ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$ e $w \in \mathcal{C}_r(z_0)$, dal Teorema di integrazione termine a termine otteniamo

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{dw}{w-z} = \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Osservato allora che

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

da quanto trovato sopra segue (6).

Dati $z, w \in \mathbb{C}$ denoteremo nel seguito con $[z, w]$ la curva avente per sostegno il segmento che congiunge z con w:

$$[z, w] := \{(1-t)z + tw,\ t \in [0, 1]\}.$$

Dai precedenti risultati otteniamo allora

Teorema 2.8. (sulla serie integrata)
Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$ e sia $A(z)$ la sua somma. Allora la serie integrata *$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ha raggio di convergenza ρ e*

$$\int_{[0,z]} A(w)\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \quad \forall\, |z| < \rho.$$

Vediamo infine come i precedenti risultati ci permettono di determinare lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo principale. Abbiamo visto che la funzione $\mathrm{Log}\,(1+z)$ risulta olomorfa in $\mathcal{B}_1(0)$ con $(\mathrm{Log}\,(1+z))' = \frac{1}{1+z}$. Ricordando che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}, \quad \forall\, |z| < 1,$$

dal Teorema fondamentale del calcolo per l'integrale curvilineo e dal Teorema sulla serie integrata di una serie di potenze, otteniamo

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \int_{[0,z]} \frac{1}{1+w}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \forall\, |z| < 1.$$

Vediamo altri esempi.

• Determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n}$. Osserviamo che la serie di potenze ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$$

e posto $w = z^2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}.$$

Essendo

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}, \quad \forall\, |z| < 1$$

otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} = -\mathrm{Log}\,(1-w), \quad \forall\, |w| < 1$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n} = -z\mathrm{Log}\,(1-z^2), \quad \forall |z| < 1.$$

• Determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)e^{n/2}}$. Osserviamo che posto $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)e^{n/2}} = A(\frac{1}{\sqrt{e}})$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e per $z \neq 0$ risulta

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{z}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} - z).$$

Poichè

$$\mathrm{Log}\,(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \forall\, |z| < 1$$

otteniamo

$$A(z) = -\frac{1}{z}(\mathrm{Log}\,(1-z) + z)$$

da cui

$$A(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\sqrt{e}\,(\log(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{1}{\sqrt{e}})$$

• Determinare lo sviluppo in potenze di $z-1$ della funzione $f(z) = z\,\mathrm{Log}\,z$. Abbiamo

$$\mathrm{Log}\,z = \mathrm{Log}\,(1 + (z-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}, \quad \forall |z-1| < 1$$

quindi per ogni $|z-1|<1$ otteniamo

$$\begin{aligned}
z\,\mathrm{Log}\,z = \mathrm{Log}\,z + (z-1)\mathrm{Log}\,z &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+2}}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k-2}\frac{(z-1)^k}{k-1} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{(z-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{(z-1)^k}{k-1} \\
&= (z-1) + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)(z-1)^k = (z-1) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k-1)}(z-1)^k.
\end{aligned}$$

CAPITOLO 3

Teoremi fondamentali sulle funzioni olomorfe

1. Esistenza di una primitiva

Data una funzione $f(z)$ continua in un aperto Ω, diciamo che la funzione $F(z)$ è un primitiva di $f(z)$ in Ω se $F(z)$ risulta olomorfa in Ω e vale $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$.

Vedremo in questo paragrafo alcuni risultati che ci garantiscono l'esistenza di una primitiva di una data funzione continua. A tale scopo osserviamo innanzitutto che dal Teorema fondamentale per l'integrale curvilineo segue in particolare

Corollario 3.1.
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Se $f(z)$ ammette primitiva in Ω allora per ogni curva chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno γ in Ω risulta

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Come esempio, calcoliamo $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ essendo γ la curva di parametrizzazione $\varphi(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, avente per sostegno la circonferenza $\partial\mathcal{B}_1(0)$ percorsa una sola volta in senso antiorario. Allora

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i \neq 0$$

Osserviamo difatti che la funzione $\frac{1}{z}$, pur essendo olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ non ammette primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ovvero non esiste $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tale che $F'(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vale il viceversa del precedente risultato in insiemi convessi. Ricordiamo che un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ è detto convesso se per ogni coppia di punti $z, w \in \Omega$ il segmento $[z, w]$ che li congiunge risulta contenuto in Ω. Nel seguito, dato un triangolo chiuso Δ denoteremo con $\partial\Delta$ la curva avente per sostegno la frontiera del triangolo percorsa una sola volta in senso antiorario. Abbiamo allora

Teorema 3.1. (esistenza di una primitiva in un convesso)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e sia $f(z)$ funzione continua in Ω. Se per ogni triangolo $\Delta \subset \Omega$ risulta

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

allora $f(z)$ ammette una primitiva in Ω.

Dim. Fissato $z_0 \in \Omega$, per ogni $z \in \Omega$, essendo Ω convesso, avremo che $[z_0, z] \subset \Omega$ Posto allora

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw$$

proviamo che $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e che $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Infatti, per $z \in \Omega$ sia $h \in \mathbb{C}$ sufficientemente piccolo di modo che $z + h \in \Omega$. Denotato con Δ_h il triangolo di vertici z_0, z e $z + h$, poichè per ipotesi

$$\int_{\partial\Delta_h} f(w)\, dw = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\, dw + \int_{[z+h,z]} f(w)\, dw + \int_{[z,z_0]} f(w)\, dw = 0$$

otteniamo

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\, dw - \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw = \int_{[z,z+h]} f(w)\, dw.$$

Dunque, essendo $\int_{[z,z+h]} dw = h$, otteniamo

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\, dw - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\, dw$$

da cui essendo $f(z)$ continua in Ω e $L([z, z+h]) = |h|$ concludiamo che

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \sup\{|f(w) - f(z)| \,|\, w \in [z, z+h]\} \to 0 \quad \text{per} \quad h \to 0$$

ovvero che $F'(z) = f(z)$. □

Eliminando la condizione di convessità dell'insieme Ω abbiamo

Teorema 3.2. (esistenza di una primitiva)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f(z)$ funzione continua in Ω. Se per ogni curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno in Ω risulta

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

allora $f(z)$ ammette una primitiva in Ω.

Dim. Possiamo assume Ω aperto connesso (altrimenti potremo costruire una primitiva F su ogni componente connessa di Ω e considerarne l'unione). Fissato $z_0 \in \Omega$, poichè abbiamo supposto Ω connesso, per ogni $z \in \Omega$ esiste una curva γ_z semplice, regolare a tratti con sostegno contenuto in Ω congiungente z_0 con z. Poniamo allora

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\, dw$$

ed osserviamo che essendo $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa γ, il precedente integrale non dipende dalla scelta della curva γ_z ma solo dai punti iniziali e finali della curva.
Preso $z \in \Omega$, sia $\delta > 0$ tale che $\mathcal{B}_\delta(z) \subset \Omega$. Preso $|h| < \delta$ avremo allora che il segmento $[z, z+h] \subset \Omega$ e posto $\gamma_h = \gamma_z \cup [z, z+h]$, dalla proprietà di additività dell'integrale otteniamo

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_h} f(w)\, dw - \int_{\gamma_z} f(w)\, dw = \int_{[z,z+h]} f(w)\, dw$$

e procedendo come nella dimostrazione del precedente Teorema si ottiene che $F'(z) = f(z)$.
□

2. Teorema di Cauchy

Vedremo in questa sezione il Teorema di Cauchy il quale afferma che per ogni funzione $f(z)$ olomorfa in un insieme aperto Ω, soddisfacente opportune ipotesi topologiche, risulta $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ per ogni curva chiusa γ con supporto in Ω. Vediamo innanzitutto una versione semplificata di tale risultato.

Teorema 3.3. (di Cauchy per un triangolo)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $p \in \Omega$. Se $f(z)$ è funzione continua in Ω ed olomorfa in $\Omega \setminus \{p\}$ allora

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

per ogni un triangolo chiuso $\Delta \subset \Omega$.

Dim. Consideriamo innanzitutto il caso in cui $p \notin \Delta$. Supponiamo per assurdo che

$$I(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \neq 0$$

Congiungendo i tre punti medi di ciascun segmento, possiamo dividere il triangolo Δ in quattro triangoli $\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}$ e $\Delta_{1,4}$. Orientando la frontiera di ciascun triangolo $\Delta_{1,i}$ nello stesso modo della frontiera di Δ otteniamo

$$I(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\Delta_{1,k}} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} I(\Delta_{1,k}) \neq 0$$

e dunque che per almeno uno di tali triangoli, che denotiamo con $\Delta_1 := \Delta_{1,k}$, risulta

$$|I(\Delta_1)| \geq \frac{1}{4}|I(\Delta)|$$

Osserviamo inoltre che si ha la seguente uguaglianza sulla lunghezza dei perimetri dei triangoli: $L(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$.
Ripetendo il precedente ragionamento con il triangolo Δ_1 in luogo del triangolo Δ e procedendo per induzione costruiremo una successione di triangoli Δ_n tale che $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n \subset \Delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}L(\partial\Delta)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$|I(\Delta_n)| \geq \frac{1}{4^n}|I(\Delta)|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Osserviamo ora che esiste uno ed un solo punto comune a tutti i triangoli Δ, sia $\{z_0\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n$, e che $f(z)$ risulta olomorfa in tale punto. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste allora $\delta > 0$ tale che

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|, \quad \forall\, |z - z_0| < \delta.$$

In corrispondenza di $\delta > 0$ esiste inoltre $\nu \in \mathbb{N}$ tale $\Delta_n \subset \mathcal{B}_\delta(z_0)$ per ogni $n \geq \nu$. Essendo, per il Corollario 3.1, $\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\,dz = 0$, per ogni $n \geq \nu$ otteniamo allora

$$|I(\Delta_n)| = |\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz| = |\int_{\partial\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\,dz| \leq$$
$$\leq \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0|\,ds \leq \varepsilon L(\partial\Delta_n)\sup\{|z - z_0|,\, z \in \partial\Delta_n\}$$

Osservato che $\sup\{|z - z_0|,\, z \in \partial\Delta_n\} \leq L(\partial\Delta_n)$ e che $L(\partial\Delta_n) = \frac{L(\partial\Delta)}{2^n}$, otteniamo che

$$|I(\Delta_n)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta_n)^2 = \varepsilon\frac{L(\partial\Delta)^2}{4^n}$$

e dunque da (7) che $|I(\Delta)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, otteniamo la contraddizione $I(\Delta) = 0$. Dunque se $p \notin \Delta$ si ha che $I(\Delta) = 0$.
Supponiamo ora che p sia un vertice del triangolo Δ. Detti q e r i restanti vertici del triangolo, preso $\varepsilon > 0$, scegliamo due punti Q e R rispettivamente nei segmenti $[p, q]$ e $[p, r]$ sufficientemente vicini a p di modo che, essendo $f(z)$ continua in Δ e dunque ivi limitata, risulti $|\int_{\partial\Delta_p} f(z)\,dz| \leq \varepsilon$ dove con Δ_p abbiamo denotato il triangolo di vertici p, Q, R. Poichè per quanto provato nel precedente caso, l'integrale di $f(z)$ lungo la frontiera dei triangoli di vertici R, r, q e R, Q, q risulta nullo, avremo

$$|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| = |\int_{\partial\Delta_p} f(z)\,dz| < \varepsilon$$

e dunque, data l'arbitrarietà di ε, otteniamo che $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.
Infine, se p è un punto qualsiasi di Δ, potremo decomporre il triangolo Δ nell'unione di due o tre di triangoli aventi il punto p per vertice ed applicare quanto provato sopra a tali triangoli. □

Dal precedente risultato e dal Teorema 3.1 otteniamo allora

Corollario 3.2.
Se $f(z)$ è funzione continua in Ω ed olomorfa in $\Omega \setminus \{p\}$, dove Ω è aperto convesso e $p \in \Omega$, allora f ammette primitiva in Ω.

Inoltre, dal Corollario 3.1 otteniamo

Teorema 3.4. (di Cauchy in un convesso)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $p \in \Omega$. Se $f(z)$ è funzione continua in Ω e olomorfa in $\Omega \setminus \{p\}$, allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

per ogni curva chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno γ in Ω.

Dim. Dal Teorema di Cauchy per un triangolo, essendo $f(z)$ continua in Ω e olomorfa in $\Omega \setminus \{p\}$, abbiamo che per ogni triangolo $\Delta \subset \Omega$ risulta $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Dal Teorema 3.1 otteniamo allora che esiste $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$ e dunque, dal Corollario 3.1, otteniamo che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = 0$$

per ogni curva chiusa γ in Ω. □

Dal precedente Teorema e dal Teorema 3.2, abbiamo allora che se $f(z)$ è funzione olomorfa nell'aperto convesso Ω, allora $f(z)$ ammette primitiva in Ω. Possiamo dunque affermare che *se $f(z)$ è funzione olomorfa in un aperto Ω allora $f(z)$ ammette localmente primitiva in Ω.*

Come applicazione del Teorema di Cauchy, vediamo di calcolare alcuni *integrali di Fresnel*, ovvero gli integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$$

Osserviamo che $e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\sin(x^2)$, consideriamo quindi la funzione $f(z) = e^{z^2}$. Tale funzione risulta olomorfa in $\mathbb{C}$ e quindi, dal Teorema di Cauchy in un convesso, per ogni curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti in $\mathbb{C}$ risulta

$$\int_\gamma e^{-z^2}\,dz = 0.$$

Dato $R > 0$, sia Γ_R la curva chiusa avente per sostegno la frontiera dell'aperto

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le R,\, 0 \le \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Osserviamo che $\Gamma_R = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ essendo γ_i, $i = 1, 2, 3$, le curve di parametrizzazione:

$$\gamma_1(t) = t,\, t \in [0, R], \quad \gamma_2(t) = Re^{it},\, t \in [0, \frac{\pi}{4}], \quad \text{e} \quad -\gamma_3(t) = te^{i\frac{\pi}{4}},\, t \in [0, R].$$

Dal Teorema di Cauchy. per ogni $R > 0$, risulta

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} e^{-z^2}\,dz &= \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz \\ &= \int_0^R e^{-t^2}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2it}} Rie^{it}\,dt \\ &\quad - \int_0^R e^{-t^2e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Osserviamo ora che risulta

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ [1]

D'altra parte, poichè $|e^{-R^2e^{2it}}| = |e^{-R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))}| = e^{-R^2\cos(2t)} \le e^{R^2(\frac{4}{\pi}t-1)}$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$[2] , otteniamo

$$|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2it}} Rie^{it}\,dt| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{R^2(\frac{4}{\pi}t-1)}\,dt = \frac{\pi}{4R}\left[e^{R^2(\frac{4}{\pi}t-1)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})$$

---

[1] Si tratta dell'integrale di Gauss e per calcolarlo si può procedere nel seguente modo. Risulta

$$(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{\mathcal{B}_R(0)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

e dunque, passando alle coordinate polari, otteniamo

$$\iint_{\mathcal{B}_R(0)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} (\int_0^R \rho e^{-\rho^2}\,d\rho)d\theta = \pi(1-e^{-R^2}) \to \pi, \quad \text{per } R \to +\infty.$$

Allora, essendo e^{-x^2} funzione pari otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

[2] Infatti si ha che $\cos x \ge 1 - \frac{2}{\pi}x$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, essendo $y = 1 - \frac{2}{\pi}$ la retta passante per i punti $(0, 1)$ e $(\frac{\pi}{2}, 0)$

e dunque che

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2it}}Rie^{it}\,dt = 0.$$

Infine, essendo $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ e $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, abbiamo

$$\int_0^R e^{-t^2e^{i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-it^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\int_0^R \cos(t^2)\,dt - i\int_0^R \sin(t^2)\,dt)$$

e dunque

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-t^2e^{i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt - i\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt).$$

Passando al limite per $R\to+\infty$ in (8) si ha

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-t^2e^{i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-t^2}\,dt + \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2it}}Rie^{it}\,dt$$

e dunque, per quanto ottenuto sopra concludiamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt - i\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt - i\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1-i}{2}$$

e dunque

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Formula di Cauchy e rappresentazione in serie di potenze

Importante conseguenza del Teorema di Cauchy in un convesso è il seguente risultato che ci permetterà di provare che ogni funzione olomorfa risulta analitica. Abbiamo

Teorema 3.5. (Formula di Cauchy)
Sia $\Omega\subset\mathbb{C}$ un aperto, $z_0\in\Omega$ e $\rho>0$ tale che $\mathcal{B}_\rho(z_0)\subset\Omega$. Se $f(z)$ è funzione olomorfa in Ω allora per ogni $0<r<\rho$ risulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \forall\, z\in\mathcal{B}_r(z_0).$$

Dim. Fissato $z\in\mathcal{B}_r(z_0)$, sia

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{se } w\in B_\rho(z_0),\ w\neq z \\ f'(z) & \text{se } w = z \end{cases}$$

Essendo $f(w)$ olomorfa in $\mathcal{B}_\rho(z_0) \subset \Omega$, avremo che $g(w)$ risulta continua in $\mathcal{B}_\rho(z_0)$ ed olomorfa in $\mathcal{B}_\rho(z_0) \setminus \{z\}$. Poichè $\mathcal{B}_\rho(z_0)$ è insieme convesso, dal Teorema di Cauchy in un convesso otteniamo allora che per ogni $r \in (0, \rho)$ risulta

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} g(w)\, dw = 0.$$

Osserviamo ora che se $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$ allora $z \neq w$ per ogni $w \in \mathcal{C}_r(z_0)$, quindi

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} g(w)\, dw = \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - f(z) \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{1}{w - z}\, dw = 0$$

e poichè, da (6), si ha

$$\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{1}{w - z}\, dw = 2\pi i,$$

ne concludiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

□

Ad esempio, osservato che $\cos z$ è funzione olomorfa in $\mathbb{C}$, per ogni $r > \pi$ dalla formula integrale di Cauchy otteniamo

$$\int_{\mathcal{C}_r(0)} \frac{\cos z}{z + \pi}\, dz = 2\pi i \cos(-\pi) = -2\pi i$$

essendo $-\pi \in \mathcal{B}_r(0)$.

Utilizzando la formula di Cauchy possiamo ora provare che ogni funzione olomorfa risulta analitica, ovvero sviluppabile localmente in serie di potenze. Vale difatti

Teorema 3.6. (Sviluppabilità in serie di potenze)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ insieme aperto. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e precisamente, per ogni $z_0 \in \Omega$ risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

essendo $r > 0$ tale che $\overline{\mathcal{B}}_r(z_0) \subset \Omega$.

Dim. Sia $z_0 \in \Omega$ e $\rho = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$ (con la convenzione che $\rho = +\infty$ se $\Omega = \mathbb{C}$). Allora $\mathcal{B}_\rho(z_0) \subset \Omega$ e dalla formula di Cauchy otteniamo che per ogni $r \in (0, \rho)$ risulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_r(z_0).$$

Osserviamo ora che per ogni $w \in \mathcal{C}_r(z_0)$ e ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$, essendo $|\frac{z - z_0}{w - z_0}| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$, risulta

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{\frac{w - z}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

e poichè la convergenza della serie è uniforme rispetto a $w \in \mathcal{C}_r(z_0)$, dal Teorema di integrazione termine a termine, otteniamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw. \end{aligned}$$

Dunque posto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$

concludiamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

□

Dal precedente Teorema abbiamo quindi in particolare che ogni funzione analitica risulta olomorfa e dunque che vale l'equivalenza

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{A}(\Omega)$$

Inoltre dal Corollario 2.5 si ha

Corollario 3.3.
Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è aperto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora $f(z)$ risulta derivabile infinite volte in Ω con derivata olomorfa in Ω. Inoltre $f(z)$ risulta localmente sviluppabile in serie di Taylor, ovvero per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste $\rho(z_0) > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_{\rho(z_0)}(z_0),$$

dove, per ogni $r \in (0,\rho)$, risulta

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Osserviamo la differenza essenziale tra i concetti di funzione derivabile in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$. Da quanto provato abbiamo difatti che, a differenza di quanto accade in campo reale, ogni funzione olomorfa (derivabile in $\mathbb{C}$) risulta derivabile infinite volte con derivata olomorfa e localmente sviluppabile in serie di Taylor.

Osserviamo inoltre che essendo ogni funzione $f(z)$ olomorfa in Ω derivabile infinite volte in Ω con derivata olomorfa, derivando la formula di Cauchy sotto segno di integrale (come si può facilmente verificare essere lecito fare), otteniamo

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw, \quad \forall z \in \mathcal{B}_r(z_0)$$

ed iterando, osservato che $\frac{d^n}{dz^n}(\frac{1}{w-z}) = \frac{n!}{(w-z)^n}$, si deduce che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente *formula di Cauchy per la derivata n-esima*:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \quad \forall z \in \mathcal{B}_r(z_0). \tag{9}$$

Tale formula potrà essere applicata per il calcolo di integrali lungo archi di circonferenza. Ad esempio, calcoliamo

$$\int_{\mathcal{C}_2(0)} \frac{e^z}{(z-i)^3}\, dz.$$

Posto $f(z) = e^z$, osservato che $i \in \mathcal{B}_2(0)$, da (9) otteniamo

$$\int_{\mathcal{C}_2(0)} \frac{f(z)}{(z-1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = e^i \pi i.$$

Abbiamo inoltre visto che se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ne segue quindi che *se $f(z)$ ammette primitiva in Ω, allora $f(z)$ risulta olomorfa in Ω*. Si ottiene quindi il seguente risultato che possiamo considerare come l'inverso del Teorema di Cauchy

TEOREMA 3.7. (DI MORERA)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Se $f(z)$ è funzione continua in Ω tale che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset \Omega$, allora $f(z)$ è olomorfa in Ω.

DIM. Sia A un sottoinsieme aperto convesso in Ω. Allora dal Teorema 3.1 di esistenza di una primitiva in un aperto convesso, abbiamo che esiste $F \in \mathcal{H}(A)$ tale che $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in A$. Poichè abbiamo visto che la derivata di una funzione olomorfa è ancora olomorfa otteniamo che $f \in \mathcal{H}(A)$ per ogni insieme aperto convesso $A \subset \Omega$. Quindi risulta $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. □

4. Teorema di Cauchy generalizzato e Indice di una curva chiusa

Riportiamo nel seguito alcune generalizzazioni dei risultati visti nelle precedenti sezioni.

Ricordiamo che per definizione, data una funzione $f(z)$ continua in un aperto Ω e una curva γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno contenuto in Ω, si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma E \cdot ds + i \int_\gamma E^\perp \cdot ds$$

essendo $E(x,y) = (u(x,y), -v(x,y))$ e $E^\perp(x,y) = (v(x,y), u(x,y))$ i campi vettoriali associati alla funzione $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Abbiamo visto nelle precedenti sezioni, che se la funzione $f(z)$ risulta olomorfa in Ω allora

$f(z)$ risulta di classe $\mathcal{C}^1$ in Ω e che, dalle condizioni di Cauchy-Riemann, risulta

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \Omega.$$

Ne segue quindi che *se $f(z)$ risulta olomorfa in Ω allora i campi E e $E^{\perp}$ risultano di classe $\mathcal{C}^1$ e irrotazionali in Ω* [3].

La teoria dei campi vettoriali si applica dunque alle funzioni olomorfe. In particolare, ricordiamo il Teorema di Gauss-Green, il quale afferma che per ogni campo vettoriale $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ risulta

$$\int_{\partial D^+} F \cdot ds = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy$$

per ogni dominio normale regolare $D \subset \overline{D} \subset \Omega$, essendo ∂D^+ la curva semplice, chiusa e regolare a tratti avente per sostegno la frontiera di D positivamente orientata. Dal Teorema di Gauss-Green segue allora che se il campo F risulta irrotazionale in Ω allora $\int_{\partial D^+} F \cdot ds = 0$ per ogni sottoinsieme $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ dominio normale regolare. Da quanto osservato abbiamo allora una prima generalizzazione del Teorema di Cauchy

Corollario 3.4.
Sia $f(z)$ funzione olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ allora per ogni dominio normale regolare $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ risulta

$$\int_{\partial D^+} f(z)\, dz = 0$$

essendo ∂D^+ la curva semplice, chiusa e regolare a tratti avente per sostegno la frontiera di D positivamente orientata.

Ricordiamo ora che due curve γ e σ, rispettivamente di parametrizzazione $\gamma : [a,b] \to \Omega$ e $\sigma : [a,b] \to \Omega$, sono dette omotope in Ω se esiste un'applicazione continua $\Phi : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ tale che

- $\Phi(t,0) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a,b]$,
- $\Phi(t,1) = \sigma(t)$, per ogni $t \in [a,b]$,

In particolare, si dice che una curva γ è omotopa ad un punto $z_0 \in \Omega$ se risulta omotopa alla curva "costante" σ_0 avente per sostegno il punto z_0. Vale allora il seguente risultato

Teorema 3.8. (di Cauchy generalizzato)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti omotopa ad un punto in Ω.

Dim. Ci limitiamo a considerare il caso in cui γ è semplice. In tal caso, essendo γ curva semplice chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti omotopa ad un punto in Ω allora si può provare che $\gamma = \partial D$ essendo $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ unione di domini normali regolari (l'esistenza di tale dominio,

[3] Ricordiamo che un campo vettoriale $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ di classe $\mathbb{C}^1$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è detto irrotazionale in Ω se risulta $\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \Omega$)

nonostante risulti intuitivo, è provato dal Teorema di Jordan e dal Teorema della funzione implicita). Quindi, dal Corollario 3.4 segue che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \pm \int_{\partial D^+} f(z)\,dz = 0.$$

□

In particolare, ricordando che un insieme aperto Ω è detto semplicemente connesso se risulta connesso e se ogni curva chiusa γ con sostegno in Ω risulta omotopa ad un punto in Ω, dal precedente risultato e dal Teorema 3.2 otteniamo

Corollario 3.5.
Se Ω è aperto semplicemente connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora per ogni curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno in Ω risulta $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Dal precedente Teorema e dal Teorema di esistenza di una primitiva abbiamo allora che *ogni funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso Ω ammette primitiva in Ω*. Osserviamo che tale risultato corrisponde all'equivalente risultato nella Teoria dei campi vettoriali, che afferma che un campo vettoriale irrotazionale in un aperto semplicemente connesso risulta conservativo (ovvero ammette un potenziale).

In particolare, dal Teorema fondamentale del calcolo per l'integrale curvilineo, otteniamo che *se $f(z)$ è funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso Ω e γ_1 e γ_2 sono curve di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno in Ω aventi i medesimi punti iniziali e finale allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Dal Teorema di Cauchy generalizzato segue inoltre

Corollario 3.6. (Invarianza per omotopia)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $f(z)$ funzione olomorfa in Ω. Allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

per ogni coppia γ_1 e γ_2 di curve chiuse di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti omotope in Ω.

Dim. Infatti, sia $\Phi(t,s) : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ l'omotopia tra γ_1 e γ_2 in Ω. Allora, detta γ la curva di parametrizzazione $\gamma(s) = \Phi(a,s)$, essendo γ_1 e γ_2 curve chiuse, avremo che la curva $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma)$ risulta curva chiusa omotopa ad un punto in Ω e dunque per il Teorema di Cauchy generalizzato si ha

$$0 = \int_\Gamma f(w)\,dw = \int_{\gamma_1} f(w)\,dw + \int_\gamma f(w)\,dw - \int_{\gamma_2} f(w)\,dw - \int_\gamma f(w)\,dw$$

da cui la tesi. □

Ad esempio, possiamo applicare il precedente risultato per calcolare l'integrale

$$\int_{\partial R} \frac{\cos z}{z}\,dz$$

essendo ∂R la curva semplice positivamente orientata avente per sostegno la frontiera del rettangolo $R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |Re(z)| \leq 2,\ |Im(z)| \leq 1\}$. Poichè $\frac{\cos z}{z}$ è funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dal Teorema di invarianza per omotopia avremo che per ogni $r > 0$ risulta

$$\int_{\partial R} \frac{\cos z}{z}\, dz = \int_{\mathcal{C}_r(0)} \frac{\cos z}{z}\, dz$$

e poichè, dalla formula di Cauchy,

$$\int_{\mathcal{C}_r(0)} \frac{\cos z}{z}\, dz = \int_{\mathcal{C}_r(0)} \frac{\cos z}{z-0}\, dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

ne segue che $\int_{\partial R} \frac{\cos z}{z}\, dz = 2\pi i$.

Data una curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, per ogni $z \notin \gamma$ risulta ben definito il valore

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Tale valore è detto indice di z rispetto alla curva chiusa γ.

Vediamo come esempio notevole l'indice di una curva γ avente per sostegno la circonferenza $\mathcal{C}_r(z_0)$ percorsa n volte in senso antiorario. Una parametrizzazione di tale curva è data de $\varphi(\theta) = z_0 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2n\pi]$. Allora dalla definizione risulta

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = n.$$

Si può provare il seguente risultato

Teorema 3.9. (sull'indice di una curva)
Sia γ curva chiusa di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$. Allora

- *(i)* $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *è funzione a valori interi, costante in ogni componente connessa di* Ω,
- *(ii)* $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *è nulla nella componente illimitata di* Ω,
- *(iii) se σ è curva chiusa omotopa a γ in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ allora* $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\sigma(z)$.

Dal Teorema 3.9 avremo che se γ_r è la curva avente per sostegno la circonferenza $\mathcal{B}_r(z_0)$ percorsa n volte in senso antiorario per ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$ risulta $\mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z_0) = n$ mentre per ogni $z \notin \overline{\mathcal{B}}_r(z_0)$, $\mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z) = 0$. Inoltre se σ è curva chiusa omotopa a γ_r in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ allora $\mathrm{Ind}_\sigma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z)$.

Dai precedenti risultati, otteniamo

Teorema 3.10. (Formula di Cauchy generalizzata)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora per ogni curva chiusa γ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con sostegno contenuto in Ω e ogni $z \in \Omega \setminus \gamma$ risulta

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Dim. Sia $z \in \Omega \setminus \gamma$ e sia $r > 0$ tale che $\overline{\mathcal{B}}_r(z) \subset \Omega$. Sia $k = \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ si può provare allora che γ risulta omotopa in $\Omega \setminus \{z\}$ alla curva σ ottenuta percorrendo la circonferenza $\mathcal{C}_r(z)$ k volte. Una parametrizzazione di tale curva sarà data da $\varphi(\theta) = z + re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2k\pi]$. Dal Teorema di invarianza per omotopia e dalla formula integrale di Cauchy otteniamo allora

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_\sigma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_0^{2k\pi} \frac{f(z+re^{i\theta})}{ire^{i\theta}} e^{i\theta}\,d\theta$$
$$= k\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta}) ire^{i\theta}\,d\theta = k\int_{\mathcal{C}_r(z)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2k\pi i f(z).$$

□

5. Alcune conseguenze della Formula di Cauchy

Vediamo in questa sezione alcune conseguenze notevoli della formula di Cauchy.

• Teorema fondamentale dell'algebra

Abbiamo già visto, come prima fondamentale conseguenza della Formula di Cauchy, che ogni funzione olomorfa in $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto risulta derivabile infinite volte in Ω con

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

essendo $z_0 \in \Omega$ e $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Ne segue allora che vale la seguente *diseguaglianza di Cauchy*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \max_{z \in \mathcal{C}_r(z_0)} |f(z)|, \quad \forall\, z_0 \in \Omega,\ 0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega),\ n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

da cui otteniamo

Teorema 3.11. (di Liouville)
Se $f(z)$ è funzione olomorfa limitata in $\mathbb{C}$ allora $f(z)$ è costante in $\mathbb{C}$.

Dim. Sia $M > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulti $|f(z)| \le M$. Preso $z_0 \in \mathbb{C}$ dalla diseguaglianza di Cauchy (10) otteniamo che

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{r}, \quad \forall\, r > 0.$$

Dunque, facendo tendere $r \to +\infty$ otteniamo che $f'(z_0) = 0$ e quindi la tesi. □

Utilizzando il precedente risultato possiamo dimostrare il Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 3.12. (di D'Alembert)
Se $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ è polinomio di grado $n \ge 1$ allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$.

Dim. Poichè per $|z| \to +\infty$ si ha

$$|P(z)| = |z|^n \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + ... + a_n\right| \to +\infty,$$

se $P(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ avremo che la funzione $Q(z) = \frac{1}{P(z)} \to 0$ per $|z| \to +\infty$. Ne segue che $Q(z)$ risulta funzione olomorfa limitata in $\mathbb{C}$ e dal Teorema di Liouville otteniamo che $Q(z)$, e dunque $P(z)$, risulta costante in $\mathbb{C}$, in contraddizione con il fatto che il grado del polinomio è $n \geq 1$. $\square$

Dato un polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$, dal Teorema di D'alembert, sia $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$. Diremo che z_0 è uno zero di ordine (o molteplicità) $m \in \mathbb{N}$ se $m \leq n$ è tale che $P(z) = (z - z_0)^m Q(z)$, essendo $Q(z)$ polinomio di grado $n - m \geq 0$ con $Q(z_0) \neq 0$. Se $Q(z)$ non risulta costante ($n > m$), potremo applicare il Teorema di D'Alembert al polinomio $Q(z)$. Procedendo in questo modo, si prova che *ogni polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ ammette esattamente n zeri in $\mathbb{C}$ se contati con la loro molteplicità.*

• Zeri di una funzione analitica e Principio di identità

In analogia con la definizione di ordine di uno zero per un polinomio, diciamo che una funzione $f(z)$ analitica in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ ha uno zero di ordine (o molteplicità) $m \in \mathbb{N}$ in $z_0 \in \Omega$ se esiste una funzione analitica $g(z)$ in Ω tale che $g(z_0) \neq 0$ e $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ per ogni $z \in \Omega$.

Osserviamo che se $f(z)$ è analitica in Ω e $z_0 \in \Omega$ dalla definizione esiste $r > 0$ e una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathcal{B}_r(z_0).$$

Avremo allora che z_0 è uno zero di ordine $m \in \mathbb{N}$ per $f(z)$ se e solo se risulta $a_0 = a_1 = ... = a_{m-1} = 0$ mentre $a_m \neq 0$. Poichè risulta

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

avremo allora che z_0 è uno zero di ordine $m \in \mathbb{N}$ per $f(z)$ se e solo se si ha $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ mentre $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Ad esempio, osservato che $z_0 = 0$ è zero della funzione $f(z) = 1 - \cos(z^2)$, determiniamo la molteplicità. Dallo sviluppo di $\cos w$ in serie di potenze di centro $z_0 = 0$ abbiamo

$$f(z) = 1 - \cos(z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{4n}}{(2n)!} = \frac{z^4}{2} - \frac{z^8}{24} + ...$$

e dunque che $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ mentre $a_4 = \frac{1}{2}$. Abbiamo quindi che $z_0 = 0$ è zero di molteplicità 4. In alternativa, abbiamo

$$f'(z) = 2z\sin(z^2), \quad f''(z) = 2\sin(z^2) + 4z^2\cos(z^2),$$
$$f'''(z) = 4z\cos(z^2) + 8z\cos(z^2) - 8z^3\sin(z^2) = 12z\cos(z^2) - 8z^3\sin(z^2)$$
$$f''''(z) = 12\cos(z^2) - 48z^2\sin(z^2) - 16z^4\cos(z^2)$$

e dunque che risulta $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ mentre $f''''(0) = 12$. Dalla precedente caratterizzazione ne segue allora che la molteplicità di $z_0 = 0$ è 4.

Abbiamo inoltre il seguente risultato che prova che una funzione analitica non identicamente nulla non può avere uno zero di "ordine infinito"[4]

TEOREMA 3.13. (ZERI DI FUNZIONI ANALITICHE)
Sia $f(z)$ funzione analitica nell'aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = 0$. Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni

(i) *$f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,*
(ii) *esiste $r > 0$ tale che $f(z) = 0$ per ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$,*
(iii) *$f(z)$ è nulla in Ω.*

DIM. $(i) \Rightarrow (ii)$ Essendo $f(z)$ analitica, esiste $(a_n)_{n\geq 0}$ e $r > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_r(z_0).$$

Poichè risulta $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ipotesi $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, ne segue che $f(z) = 0$ per ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Immediato.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sia

$$\Omega_0 = \{z \in \Omega \,|\, f^{(n)}(z) = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Osserviamo che essendo $(i) \Leftrightarrow (ii)$, abbiamo che $z_0 \in \Omega_0$ e che se $z \in \Omega_0$ allora esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{B}_r(z) \subset \Omega_0$. Dunque Ω_0 risulta aperto e non vuoto. D'altra parte, essendo una funzione analitica continua insieme a tutte le sue derivate, il complementare $\Omega \setminus \Omega_0$ risulta è anch'esso aperto. Poichè Ω è connesso e $\Omega_0 \neq \emptyset$, avremo $\Omega \equiv \Omega_0$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Immediato. □

Abbiamo dunque che se z_0 è uno zero della funzione $f(z)$ analitica e non identicamente nulla in un aperto connesso Ω allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ mentre $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, ovvero z_0 è zero di ordine m. Denotato con

$$Z(f) := \{z \in \Omega \,|\, f(z) = 0\}$$

l'insieme degli zeri di $f(z)$, abbiamo

COROLLARIO 3.7.
Sia $f(z)$ funzione analitica nell'aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ non identicamente nulla in Ω. Allora $Z(f)$ è costituito da punti isolati e non ammette punti di accumulazione in Ω.

DIM. Sia $z_0 \in Z(f)$, per quanto provato nel precedente Teorema abbiamo che esiste $m \in \mathbb{N}$ e una funzione $g(z)$ analitica in Ω con $g(z_0) \neq 0$ tale che $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. Essendo $g(z)$ continua avremo che $g(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 e dunque che z_0 è uno zero isolato

[4] Osserviamo che la funzione reale di classe $\mathcal{C}^\infty$ $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ha invece uno zero di ordine infinito in 0 essendo $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

di $f(z)$.
Proviamo ora che $Z(f)$ non ammette punti di accumulazione. Per assurdo, sia $z_0 \in \Omega$ punto di accumulazione di $Z(f)$. Avremo allora che esiste una successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z(f)$ tale che $z_n \to z_0$ per $n \to +\infty$. Essendo $f(z)$ continua si ottiene che $f(z_0) = 0$, dunque $z_0 \in Z(f)$ e non risulta punto isolato, in contraddizione con il fatto che ogni zero di $f(z)$ è isolato. □

Dal teorema sugli zeri di una funzione analitica segue inoltre immediatamente

COROLLARIO 3.8. (PRINCIPIO DI IDENTITÀ)
Siano $f(z)$ e $g(z)$ funzioni analitiche nell'aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se $f(z)$ e $g(z)$ coincidono in un intorno di $z_0 \in \Omega$ allora coincidono in tutto Ω.

DIM. È sufficiente applicare il Teorema 3.13 $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ alla funzione $f(z) - g(z)$. □

• PROPRIETÀ DELLA MEDIA E PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO

Come ulteriore applicazione della Formula di Cauchy, abbiamo che per ogni funzione olomorfa in un disco $\mathcal{B}_\rho(z_0)$ si ha che il valore $f(z_0)$ per ogni $0 < r < \rho$ risulta pari alla media dei valori assunti dalla funzione sul cerchio $\mathcal{C}_r(z_0)$. Precisamente si ha

TEOREMA 3.14. (PROPRIETÀ DELLA MEDIA)
Se $f(z)$ è funzione olomorfa nel disco aperto $\mathcal{B}_\rho(z_0)$, allora per ogni $0 < r < \rho$ risulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{11}$$

DIM. Dalla Formula di Cauchy abbiamo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)}\, dw$$

e considerando $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ come parametrizzazione della curva $\mathcal{C}_r(z_0)$, otteniamo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

□

Dalla Proprietà della media si ottiene inoltre il seguente risultato.

TEOREMA 3.15. (PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO)
Sia $f(z)$ funzione olomorfa nell'aperto connesso Ω. Se $|f(z)|$ ammette massimi relativi in Ω allora $f(z)$ è costante in Ω.

DIM. Sia $z_0 \in \Omega$ un punto di massimo relativo per $|f(z)|$. Per definizione abbiamo allora che esiste $\rho > 0$ tale che $\mathcal{B}_\rho(z_0) \subset \Omega$ e $|f(z)| \le |f(z_0)|$ per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$. Osserviamo che, dal Principio di identità per provare che $f(z)$ risulta costante in Ω è sufficiente provare che $f(z)$ risulta costante in $\mathcal{B}_\rho(z_0)$. Se $f(z_0) = 0$, otteniamo immediatamente che $f(z) = 0$ in $\mathcal{B}_\rho(z_0)$.
Se $f(z_0) \neq 0$, consideriamo la funzione $g(z) = \frac{f(z)}{f(z_0)}$ olomorfa in Ω con $g(z_0) = 1$. Abbiamo allora che $|g(z)| \le |g(z_0)| = 1$ per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$. Ne segue allora che, per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$

risulta $Re(g(z)) \leq |g(z)| \leq 1$ ed inoltre, che se $Re(g(z)) = 1$ allora $g(z) = 1$.
Ora, dalla proprietà della media abbiamo che per ogni $r < \rho$ risulta

$$1 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} 1 - g(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = 0$$

Ne segue che

$$\int_0^{2\pi} 1 - Re(g(z_0 + re^{i\theta}))\, d\theta = 0$$

e poichè $Re(g(z_0+re^{i\theta})) \leq 1$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, ne concludiamo che $Re(g(z_0+re^{i\theta})) = 1$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ e ogni $r < \rho$. Otteniamo allora che per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$ risulta $Re(g(z)) = 1$ e dunque che $g(z) = 1$, ovvero $f(z) = f(z_0)$ per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$. □

In particolare, dal precedente risultato abbiamo che se $f(z)$ è funzione olomorfa nell'aperto connesso limitato $\Omega \subset \mathbb{C}$ e continua in $\overline{\Omega}$ allora

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

e se $f(z)$ non è costante allora

$$|f(z)| < \max_{w \in \partial\Omega} |f(w)|, \quad \forall\, z \in \Omega.$$

6. Funzioni armoniche

Una funzione $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è detta armonica nell'aperto Ω se $g(z)$ risulta derivabile due volte con derivate continue in Ω e soddisfa l'*equazione di Laplace*:

$$\Delta g := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Data una funzione $f(z)$ definita nell'aperto Ω, siano $u(x, y)$ e $v(x, y)$ la sua parte reale e immaginaria: $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Da quanto visto abbiamo che se $f(z)$ risulta olomorfa in Ω allora anche $f'(z)$ risulta olomorfa in Ω, quindi in particolare abbiamo che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ risultano derivabili due volte in Ω con derivate continue. Inoltre, dalle condizioni di Cauchy-Riemann abbiamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

e poichè le condizioni di Cauchy-Riemann risultano soddisfatte anche da f' e

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial x})$$

e dunque che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ soddisfano l'equazione di Laplace in Ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Abbiamo quindi che *la parte reale $u(x,y)$ e la parte immaginaria $v(x,y)$ di una funzione olomorfa in Ω risultano funzioni armoniche in Ω.*

Viceversa, abbiamo che ogni funzione armonica in un aperto semplicemente connesso risulta parte reale di una funzione olomorfa. Vale difatti

TEOREMA 3.16. *Sia $u(x,y)$ funzione armonica nell'aperto semplicemente connesso Ω. Allora esiste una funzione $v(x,y)$ armonica in Ω (detta* coniugata armonica di *$u(x,y)$) tale che $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ risulti olomorfa in Ω.*

DIM. Consideriamo il campo vettoriale $F(x,y) = (-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y))$. Poichè $u(x,y)$ è armonica abbiamo che $F(x,y)$ risulta campo di classe $\mathcal{C}^1$ in Ω e inoltre, dall'equazione di Laplace, abbiamo che $F(x,y)$ risulta irrotazionale in Ω:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y})$$

Dalla Teoria dei campi vettoriali, essendo Ω semplicemente connesso, abbiamo allora che $F(x,y)$ risulta campo conservativo e dunque esiste $v(x,y)$ tale che $\nabla v = F$ in Ω, ovvero tale che

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Riconosciamo nelle precedenti equazioni le equazioni di Cauchy-Riemann associate alla funzione $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ che dunque risulta olomorfa in Ω. □

Dal precedente risultato e dalle proprietà viste sulle funzioni olomorfe segue che ogni funzione armonica risulta di classe $\mathbb{C}^\infty$. Seguono inoltre le seguenti proprietà delle funzioni armoniche:

TEOREMA 3.17. (PRINCIPIO DI IDENTITÀ PER FUNZIONI ARMONICHE)
Sia $u(x,y)$ funzione armonica in un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se $u(x,y)$ risulta nulla in un intorno di $(x_0,y_0) \in \Omega$ allora $u(x,y)$ risulta identicamente nulla in Ω.

Inoltre

TEOREMA 3.18. (PROPRIETÀ DELLA MEDIA PER FUNZIONI ARMONICHE)
Se $u(x,y)$ è funzione olomorfa nel disco aperto $\mathcal{B}_\rho(x_0,y_0)$, allora per ogni $0 < r < \rho$ risulta

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta.$$

Infine

TEOREMA 3.19. (PRINCIPIO DEL MASSIMO PER FUNZIONI ARMONICHE)
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto connesso. Se $u(x,y)$ ammette un punto di massimo relativo in Ω allora $u(x,y)$ è costante in Ω.

CAPITOLO 4

Singolarità di Funzioni Olomorfe

In questo capitolo studieremo il comportamento di una funzione olomorfa nell'intorno di un punto singolare definito come segue. Diremo che una funzione $f(z)$ ha una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$ se esiste $r > 0$ tale che $f(z)$ risulta definita e olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Ad esempio, le funzioni $\frac{1}{z}$, $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ hanno una singolarità isolata in $z_0 = 0$. La funzione $\frac{1}{1+z^2}$ ha singolarità isolate nei punti $z_0 = \pm i$.

Il principale strumento per lo studio di una funzione nell'intorno di una singolarità è dato dallo *sviluppo in serie di Laurent* di tale funzione.

1. Serie di Laurent

Si dice serie di Laurent di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ una serie della forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{12}$$

dove si intende che tale serie converge in $z \in \mathbb{C}$ se risultano tali le due serie a secondo membro. Osserviamo che tali serie risultano serie di potenze, infatti, ponendo $w = \frac{1}{z-z_0}$ possiamo riscrivere la prima serie come $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$. Detto allora $\frac{1}{r}$ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ e R il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, se $r < R$, avremo che la serie di Laurent (12) risulterà convergente in ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $r < |z-z_0| < R$. Denotata con $\mathcal{S}_{r,R}(z_0)$ la corona circolare aperta di centro z_0 e raggi $0 \le r < R \le +\infty$:

$$\mathcal{S}_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z-z_0| < R\},$$

dai risultati sulle serie di potenze, abbiamo allora che la serie di Laurent (12), risulta assolutamente convergente nella corona $\mathcal{S}_{r,R}(z_0)$ e uniformemente convergente in ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathcal{S}_{r,R}(z_0)$. Inoltre, denotata con $f(z)$ la somma di tale serie, abbiamo che $f(z)$ risulta funzione olomorfa in $\mathcal{S}_{r,R}(z_0)$.

Proveremo nel seguito che, viceversa, ogni funzione olomorfa in una corona circolare $\mathcal{S}_{r,R}(z_0)$ risulta ivi sviluppabile in serie di Laurent. Innazitutto, dalla formula di Cauchy generalizzata, abbiamo

Teorema 4.1. (Lemma di Laurent)
Sia $f(z)$ funzione olomorfa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenente la corona circolare chiusa $\overline{\mathcal{S}}_{r,R}(z_0)$ con $0 < r < R < +\infty$. Allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_R(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \forall\, z \in \mathcal{S}_{r,R}(z_0).$$

Dim. Dato $z \in \mathcal{S}_{r,R}(z_0)$, dalla formula di Cauchy abbiamo che per $\rho > 0$ tale che $\mathcal{B}_\rho(z) \subset \mathcal{S}_{r,R}(z_0)$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_\rho(z)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Consideriamo il cammino chiuso $\Gamma = \gamma_R \cup s^+ \cup \gamma_r \cup s^-$, essendo γ_R la curva ottenuta percorrendo $\partial\mathcal{B}_R(z_0)$ una sola volta in senso antiorario , γ_r la curva ottenuta percorrendo $\partial\mathcal{B}_r(z_0)$ una sola volta in senso orario e s^+ la curva ottenuta percorrendo un segmento s (non passante per z) congiungente $\partial\mathcal{B}_R(z_0)$ con $\partial\mathcal{B}_r(z_0)$ e s^- il medesimo segmento in senso opposto. Allora Γ risulta omotopa a $\mathcal{C}_\rho(z)$ in $\mathcal{S}_{r,R}(z_0) \setminus \{z\}$ e dal Teorema di invarianza per omotopia otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_\rho(z)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Poichè

$$\int_{s^-} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\int_{s^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

e $\gamma_R = \mathcal{C}_R(z_0)$ mentre $\gamma_r = -\mathcal{C}_r(z_0)$, si ha allora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_R(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \end{aligned}$$

□

Ne segue allora

Teorema 4.2. (Sviluppabilità in serie di Laurent)
Sia $f(z)$ funzione olomorfa nella corona circolare $\mathcal{S}_{r,R}(z_0)$ con $0 \le r < R \le +\infty$. Allora

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{S}_{r,R}(z_0). \tag{13}$$

dove per $\rho \in (r,R)$ risulta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dim. Infatti, scelti $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, dal Lemma di Laurent applicato alla corona circolare $\mathcal{S}_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$ abbiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_1}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \forall\, z \in \mathcal{S}_{\rho_1,\rho_2}(z_0) \tag{14}$$

Procedendo come nella dimostrazione del Teorema sulla sviluppabilità in serie di potenze delle funzioni olomorfe, per ogni $|z-z_0| < \rho_2$, essendo $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| < 1$ per ogni $|w-z_0| = \rho_2$, risulta

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n\ge 0} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)}\sum_{n\geq 0}f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$$
$$=\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw)(z-z_0)^n$$

Analogalmente, per ogni $|z-z_0|>\rho_1$, essendo $|\frac{w-z_0}{z-z_0}|<1$ per ogni $|w-z_0|=\rho_1$ abbiamo

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}=-\sum_{k\geq 0}\frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}=-\sum_{n\leq -1}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

(dove abbiamo posto $-n=k+1$) da cui

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_1}(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)}\sum_{n\leq -1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,dw$$
$$=\sum_{n\leq -1}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_1}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw)(z-z_0)^n$$

Osservato ora che per il Teorema di invarianza per omotopia per ogni $\rho_1<\rho<\rho_2$ risulta

$$\int_{\mathcal{C}_{\rho}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^k}\,dw=\int_{\mathcal{C}_{\rho_1}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^k}=\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^k}\,dw,\quad \forall k\in\mathbb{Z},$$

da (14) e da quanto provato otteniamo che per ogni $z\in\mathcal{S}_{\rho_1,\rho_2}(z)$ risulta

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_2}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw)(z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n\leq -1}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho_1}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw)(z-z_0)^n$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw)(z-z_0)^n$$

Essendo $\rho_1<\rho_2$ arbitrari in (r,R) segue la tesi. □

Si può inoltre provare che lo sviluppo in serie di Laurent ottenuto nel precedente Teoema è unico, ovvero se

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(z-z_0)^n\quad\forall\, z\in\mathcal{S}_{r,R}(z_0),$$

allora, per ogni $n\in\mathbb{Z}$ e $\rho\in(r,R)$ risulta

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_{\rho}(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ che risulta definita e olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$. I punti $\pm i$ risultano quindi delle singolarità isolate per $f(z)$. Ricordando che $\frac{1}{1+w}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n w^n$ per ogni $|w|<1$, per

$0 < |z - i| < 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\frac{1}{\frac{z-i}{2i}+1}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}(-\frac{1}{2i})^n(z-i)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8i}(z-i) + ...\end{aligned}$$

Da quanto abbiamo provato ne segue in particolare che per ogni $\rho \in (0, 2)$ risulta

$$a_{-1} = \frac{1}{2i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_\rho(i)} \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

e dunque che $\int_{\mathcal{C}_\rho(i)} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \pi$.

2. Classificazione delle Singolarità

Se $f(z)$ è funzione con una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$, dalla definizione abbiamo che esiste $R > 0$ tale che $f(z)$ risulta olomorfa nella "corona circolare" $\mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dal Teorema di sviluppabilità in serie di Laurent abbiamo allora che esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_R(z_0)\setminus\{z_0\}.$$

A seconda del numero di termini a_n con $n < 0$ non nulli possiamo dare la seguente classificazione delle singolarità:

- Se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$, ovvero se risulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\},$$

diremo che z_0 è una singolarità eliminabile.

- Se $a_n = 0$ per ogni $n < -m$ e $a_{-m} \neq 0$, ovvero se risulta

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_R(z_0)\setminus\{z_0\},$$

diremo che z_0 è un polo di ordine $m \in \mathbb{N}$. In particolare, nel caso in cui $m = 1$ si dice che z_0 è un polo semplice,

- Altrimenti, se $a_n \neq 0$ per infiniti indici $n < 0$, diremo che z_0 è una singolarità essenziale.

Vediamo qualche esempio.

• Consideriamo la funzione $\frac{\sin z}{z}$ che presenta una singolarità isolata in $z_0 = 0$. Dallo sviluppo in serie di potenze di $\sin z$ abbiamo

$$\sin z = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Dunque risulta

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ..., \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e dalla definizione data, $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile.

• Consideriamo la funzione $\frac{1}{1+z^2}$. Abbiamo visto che per ogni $0 < |z-i| < 2$ risulta

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8i}(z-i) + ...$$

dunque, secondo la definizione data $\frac{1}{1+z^2}$ ha un polo semplice in $z_0 = i$.

• La funzione $\sin\frac{1}{z}$ presenta invece una singolarità essenziale in $z_0 = 0$, in quanto dallo sviluppo in serie di potenze di $\sin z$ per ogni $z \neq 0$ risulta

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + ...$$

Vediamo una caratterizzazione delle singolarità isolate.

Teorema 4.3. (Caratterizzazione delle singolarità eliminabili) *Sia $f(z)$ funzione con una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0;*
(*ii*) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$;
(*iii*) *esiste $r > 0$ e una funzione $g(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$ tale che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \neq z_0$.*

Dim. Dalla definizione e dal Teorema di sviluppabilità in serie di Laurent sia $R > 0$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n \quad \forall\, \mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se z_0 è una singolarità eliminabile, allora risulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \to a_0 \in \mathbb{C}, \quad \text{per } z \to z_0$$

e dunque $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 = \ell \in \mathbb{C}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se $f(z) \to \ell \in \mathbb{C}$ per $z \to z_0$, allora posto

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ \ell & \text{se } z = z_0, \end{cases}$$

otteniamo che $g(z)$ risulta continua in $\mathcal{B}_R(z_0)$ ed olomorfa in $\mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dal Corollario 3.2 abbiamo allora che $g(z)$ ammette primitiva in $\mathcal{B}_R(z_0)$ e dunque risulta olomorfa in $\mathcal{B}_R(z_0)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sia $r > 0$ e $g(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$ tale che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in$

$\mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Essendo $g(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$, dal Teorema di sviluppabilità in serie di potenze esiste allora una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $0 < \rho \leq r$ tale che

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathcal{B}_\rho(z_0)$$

dunque per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

e dall'unicità dello sviluppo in serie di Laurent segue allora che $a_n = b_n$ per ogni $n \geq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < 0$. Dunque z_0 è singolarità eliminabile. □

Dal precedente risultato, se z_0 è singolarità eliminabile della funzione $f(z)$ allora esiste una funzione olomorfa $g(z)$ tale che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \neq z_0$. Tale funzione è detta prolungamento analitico di $f(z)$ in z_0.

Ad esempio, le funzioni $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$, $\frac{z-\sinh z}{z^3}$ e $\frac{e^{z^2}-e^{-z^2}}{z^2}$ hanno una singolarità eliminabile in $z_0 = 0$.

Per quanto riguarda i poli abbiamo invece

Teorema 4.4. (Caratterizzazione dei poli)
Sia $f(z)$ funzione con una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(*i*) *$f(z)$ ha un polo di ordine $m \in \mathbb{N}$ in z_0;*
(*ii*) *esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;*
(*iii*) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$;
(*iv*) *esiste $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$ e una funzione $g(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$ con $g(z_0) \neq 0$ e tale che*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \textit{per ogni } \mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Dim. Dalla definizione e dal Teorema di sviluppabilità in serie di Laurent sia $R > 0$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \forall \mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se z_0 è un polo di ordine $m \in \mathbb{N}$, per definizione risulta

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

dove $a_{-m} \neq 0$ e quindi per $z \to z_0$ otteniamo

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + ... + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^{n+m} \to a_{-m} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ È immediata essendo

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)||z - z_0|^m}{|z - z_0|^m} = +\infty.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Se $|f(z)| \to +\infty$ per $z \to z_0$, allora esiste $0 < r < R$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Allora la funzione $\frac{1}{f(z)}$ risulta olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ e

poichè $\frac{1}{f(z)} \to 0$ per $z \to z_0$, dalla caratterizzazione delle singolarità eliminabili, esiste una funzione $h(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$ tale che $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ per ogni $z \neq z_0$. Inoltre $h(z_0) = 0$ e dunque z_0 risulta uno zero isolato per $h(z)$. Dal Teorema sugli zeri di funzioni analitiche abbiamo allora che esiste $m \in \mathbb{N}$ e una funzione $H(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$ con $H(z_0) \neq 0$ tale che $h(z) = (z - z_0)^m H(z)$. Posto $g(z) = \frac{1}{H(z)}$ avremo che $g(z)$ risulta olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$ con $g(z_0) \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m H(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Essendo $g(z)$ olomorfa in $\mathcal{B}_r(z_0)$, esiste una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $0 < \rho \leq r$ tale che

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z-z_0)^n = b_0+b_1(z-z_0)+...+b_{m-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n\geq m} b_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in \mathcal{B}_\rho(z_0).$$

Ne segue per ogni $z \in \mathcal{B}_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulta

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + ... + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + \sum_{n\geq m} b_n(z - z_0)^{n-m}.$$

Essendo $g(z_0) = b_0 \neq 0$, dalla definizione segue che z_0 risulta un polo di ordine $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Ad esempio, la funzione $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$ ha un polo di molteplicità 2 in $z_0 = 1$, essendo $z_0 = 1$ uno zero di molteplicità 2 per $h(z) = (z - 1)^2$. In generale, considerata una funzione della forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

dove $h(z)$ e $g(z)$ sono funzioni olomorfe in un aperto Ω, avremo che gli zeri della funzione $h(z)$ saranno delle singolarità isolate per $f(z)$. Inoltre se $z_0 \in \Omega$ è zero di molteplicità $m \in \mathbb{N}$ per $h(z)$ avremo che

- z_0 è singolarità eliminabile per $f(z)$ se z_0 è zero di molteplicità $n \geq m$ per $g(z)$,
- z_0 è un polo di ordine $m - n$ se z_0 è zero di molteplicità $0 \leq n < m$ per $g(z)$.

Ad esempio, la funzione

$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{1 - \cos(z^2)}$$

ha un polo di ordine 3 in $z_0 = 0$.

Infine, dai precedenti Teoremi, e dunque per esclusione dei precedenti casi, otteniamo

Teorema 4.5. (Caratterizzazione delle singolarità essenziali)
Sia $f(z)$ funzione con una singolarità isolata in $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora $f(z)$ ha una singolarità essenziale in z_0 se e solo se non esiste il limite $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$.

3. Teorema dei residui

Vedremo in questa sezione una tecnica particolarmente utile per il calcolo di integrali della forma $\int_\gamma f(z)\,dz$ dove γ è una curva chiusa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f(z)$ è funzione olomorfa in Ω eccetto al più un numero finito di singolarità isolate.

Osserviamo che data una funzione $f(z)$ con una singolarità isolata in z_0, dal Teorema di sviluppabilità in serie di Laurent abbiamo che esiste $R > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}. \tag{15}$$

dove per $\rho \in (0, R)$ risulta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

In particolare abbiamo che

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho(z_0)} f(w)\, dw.$$

Tale termine viene detto residuo di $f(z)$ in z_0 e viene denotato con $\mathrm{Res}(f, z_0)$. Dunque, per definizione, si ha

$$\int_{\mathcal{C}_\rho(z_0)} f(w)\, dw = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_0)$$

e dal Teorema di invarianza per omotopia, per ogni curva chiusa γ in $\mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ omotopa in $\mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ alla curva $\mathcal{C}_\rho(z_0)$, $\rho \in (0, R)$, risulta

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_0)$$

Più in generale vale il seguente risultato

Teorema 4.6. (dei residui)
Sia $f(z)$ funzione olomorfa in un aperto Ω eccetto al più un infinità numerabile $z_1, z_2, ..., z_k, ...$ di singolarità isolate e sia γ una curva positivamente orientata, di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, semplice e chiusa omotopa ad un punto in Ω. Se $z_k \notin \gamma$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \mathrm{Res}(f, z_k),$$

essendo $D \subset \Omega$ aperto tale che $\gamma = \partial D^+$.

Dim. Poichè $\overline{D} \cap \Omega$ risulta chiuso e limitato, esisteranno solo un numero finito di singolarità isolate z_k in D, siano $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$,..., $\bar{z}_n$. Siano $r_1, r_2, ..., r_n$ numeri positivi sufficientemente piccoli di modo che per ogni $k = 1, ..., n$ risulti $\overline{\mathcal{B}}_{r_k}(\bar{z}_k) \subset D$ e per ogni $k \neq h$ si abbia $\overline{\mathcal{B}}_{r_k}(z_k) \cap \overline{\mathcal{B}}_{r_h}(z_k) = \emptyset$. Sia allora $\sigma = \cup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k}(z_k) \cup \gamma_k^\pm$, essendo γ_k un segmento congiungente $\mathcal{C}_{r_k}(z_k)$ con $\mathcal{C}_{r_{k+1}}(z_{k+1})$. Allora si può provare che σ risulta curva chiusa omotopa

a γ in $\Omega \setminus \{\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n\}$ e dunque dal Teorema di invarianza per omotopia risulta

$$\int_\gamma f(w)\,dw = \int_\sigma f(w)\,dw = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_{r_k}(z_k)} f(w)\,dw = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, \bar{z}_k) = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

□

Abbiamo visto che per definizione il residuo di una funzione $f(z)$ con una singolarità isolata in z_0 è pari al coefficiente a_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Ad esempio, la funzione $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ ha una singolarità isolata in $z_0 = 0$ e dallo sviluppo di potenze di e^w in $w = 0$, per ogni $z \neq 0$ abbiamo

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + ...$$

quindi $\mathrm{Res}(e^{-\frac{1}{z}}, 0) = -1$. Dai precedenti risultati, per ogni curva γ semplice e chiusa omotopa a $\mathcal{C}_1(0)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ risulta

$$\int_\gamma e^{-\frac{1}{z}}\,dz = -2\pi i.$$

Come ulteriore esempio, consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ che presenta due singolarità isolate nei punti $\pm i$. Abbiamo allora che per ogni $r > 1$ si ha

$$\int_{\mathcal{C}_r(0)} \frac{1}{z^2+1}\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+1}, i) + \mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+1}, -i))$$

e poichè abbiamo $\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+1}, i) = \frac{1}{2i}$ mentre $\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+1}, -i) = -\frac{1}{2i}$ otteniamo che

$$\int_{\mathcal{C}_r(0)} \frac{1}{z^2+1}\,dz = 0$$

Vediamo alcuni metodi per calcolare il residuo nel caso particolare di singolarità non essenziali.

Innanzitutto osserviamo che dalla definizione, *se $f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0, allora* $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.
Se $f(z)$ ha un polo semplice in z_0, per definizione risulta

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

moltiplicando per $(z - z_0)$ si ha

$$f(z)(z - z_0) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

e passando al limite per $z \to z_0$ otteniamo

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0). \tag{16}$$

Ad esempio, calcoliamo il residuo della funzione $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ in $z_0 = 0$. Osserviamo che $z_0 = 0$ è polo semplice per $f(z)$ in quanto, per il Teorema di caratterizzazione delle singolarità, per $z \to 0$ risulta $f(z)z = \cos z \frac{z}{\sin z} \to 1 \neq 0$. Abbiamo allora che

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} f(z)z = 1$$

In generale, se $f(z)$ ha un polo di ordine m in z_0, dal Teorema di caratterizzazione dei poli, abbiamo che esiste una funzione $g(z)$ olomorfa in un intorno di z_0 con $g(z_0) \neq 0$ e tale che $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ per $z \neq z_0$. Dal Teorema di sviluppabilità in serie di potenze abbiamo che

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = b_0 + ... + b_{m-1}(z - z_0)^{m-1} + b_m (z - z_0)^m + ...$$

da cui

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m} = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + b_m + ...$$

Ne segue allora che

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

e poichè per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta $g^{(k)}(z_0) = \lim_{z \to z_0} D^{(k)}((z - z_0)^m f(z))$ si ottiene che

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{D^{(m-1)}((z - z_0)^m f(z))}{(m-1)!} \tag{17}$$

Ad esempio, calcoliamo il residuo della funzione $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$. Tale funzione ha un polo di ordine 2 in $z_0 = 0$, in quanto

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1 \neq 0$$

Per calcolarne il residuo utilizziamo la precedente formula;

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z \sin z}, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{D(z^2 f(z))}{1!} = \lim_{z \to 0} D(\frac{z}{\sin z}) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} = 0.$$

Infine, vediamo il caso di funzioni che sono rapporto di due funzioni olomorfe. Siano allora $g(z)$ e $h(z)$ funzione olomorfe in un aperto Ω e sia

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

Se $z_0 \in \Omega$ è tale che $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$ (z_0 è zero di molteplicità 1 per $h(z)$) e $g(z_0) \neq 0$, allora z_0 risulta polo semplice per $f(z)$ ed inoltre

$$(z - z_0) f(z) = (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)}.$$

Ne segue allora che

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \tag{18}$$

Ad esempio, per calcolare il residuo di $\frac{e^z}{\sin z}$, osservato che z_0 è zero semplice di $\sin z$ dalla precedente formula otteniamo

$$\mathrm{Res}(\frac{e^z}{\sin z}, 0) = \frac{e^0}{\cos 0} = 1.$$

4. Applicazione al calcolo di integrali

In questa sezione, attraverso degli esempi, vedremo come calcolare alcuni integrali curvilinei ed integrali impropri utilizzando il metodo dei residui.

Come primo esempio, calcoliamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin\theta}\, d\theta.$$

Possiamo riscrivere tale integrale come integrale lungo la circonferenza $\mathcal{C}_1(0)$. Utilizzando come parametrizzazione della curva $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ricordando che

$$\int_{\mathcal{C}_1(0)} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta}\, d\theta$$

e che $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin\theta}\, d\theta = \int_{\mathcal{C}_1(0)} \frac{2}{1 + 4iz - z^2}\, dz$$

La funzione $h(z) = 1 + 4iz - z^2$ ammette due zeri semplici nei punti

$$z_1 = (2 + \sqrt{3})i \quad \text{e} \quad z_2 = (2 - \sqrt{3})i.$$

Osservato che solo $z_2 \in \mathcal{B}_1(0)$, posto $f(z) = \frac{2}{1+4iz-z^2}$, dal Teorema dei residui otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin\theta}\, d\theta = \int_{\mathcal{C}_1(0)} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z), z_2)$$

e da (18), essendo $f(z) = \frac{2}{h(z)}$, si ha

$$\mathrm{Res}(f(z), z_2) = \frac{2}{h'(z_2)} = \frac{2}{4i - 2z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

In modo analogo si può provare che per ogni $a > |b|$ risulta

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Vediamo ora alcuni lemmi tecnici che ci torneranno utili per il calcolo di integrali impropri.

TEOREMA 4.7. (LEMMA DEL GRANDE CERCHIO)
Sia $f(z)$ funzione definita e continua in un aperto connesso Ω eccetto al più in $z_0 \in \Omega$ e siano $R_0 > 0$ e $\theta_1 < \theta_2$ tali che risulti

$$S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| > R_0,\, \theta_1 \leq \operatorname{Arg}(z - z_0) \leq \theta_2\} \subset \Omega$$

Se $(z - z_0)f(z) \to \lambda \in \mathbb{C}$ per $|z| \to \infty$, $z \in S$, allora

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \lambda i(\theta_2 - \theta_1)$$

essendo $\gamma_R = \mathcal{C}_R(z_0) \cap S$ per ogni $R > R_0$.

DIM. Per ogni $R > R_0$ si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\gamma_R} f(z) - \frac{\lambda}{z - z_0}\, dz + \int_{\gamma_R} \frac{\lambda}{z - z_0}\, dz = \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0}\, dz + \lambda i(\theta_2 - \theta_1)$$

Da cui

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_R} f(z)\, dz - \lambda i(\theta_2 - \theta_1)| &= |\int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0}\, dz| \\ &\leq L(\gamma_R) \max_{z \in \gamma_R} |\frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0}| = R(\theta_2 - \theta_1) \max_{z \in \gamma_R} \frac{|(z - z_0)f(z) - \lambda|}{R} \to 0 \end{aligned}$$

per $R \to +\infty$ essendo $(z - z_0)f(z) \to \lambda$ per $|z| \to \infty$, $z \in S$. □

In modo analogo si prova

TEOREMA 4.8. (LEMMA DEL PICCOLO CERCHIO)
Sia $f(z)$ funzione definita e continua in un aperto connesso Ω eccetto al più in $z_0 \in \Omega$ e siano $r_0 > 0$ e $\theta_1 < \theta_2$ tali che risulti

$$S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r_0,\, \theta_1 \leq \operatorname{Arg}(z - z_0) \leq \theta_2\} \subset \Omega$$

Se $(z - z_0)f(z) \to \lambda \in \mathbb{C}$ per $z \to z_0$, $z \in S$, allora

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \lambda i(\theta_2 - \theta_1)$$

essendo $\gamma_r = \mathcal{C}_r(z_0) \cap S$ per ogni $0 < r < r_0$.

Infine si può provare

TEOREMA 4.9. (LEMMA DI JORDAN)
Sia $f(z)$ funzione definita e continua in un aperto connesso Ω e siano $R_0 > 0$ e $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ tali che risulti

$$S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R_0,\, \theta_1 \leq \operatorname{Arg} z \leq \theta_2\} \subset \Omega$$

Se $f(z) \to 0$ per $|z| \to \infty$, $z \in S$, allora per ogni $\alpha > 0$ risulta

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

essendo $\gamma_R = \mathcal{C}_R(0) \cap S$ per ogni $R > R_0$.

Vediamo qualche esempio.

• Calcoliamo l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx,$$

che risulta convergente per il criterio del confronto asintotico. La funzione $\frac{1}{1+z^4}$ ammette quattro poli semplici (corrispondenti agli zeri della funzione $1+z^4$) nei punti $z_k = e^{i\frac{2k+1}{4}\pi}$, $k = 0, 1, 2, 3$ dove, da (18),

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{1+z^4}, z_k) = \frac{1}{4z_k^3}.$$

Consideriamo la curva $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ essendo γ_R la curva di parametrizzazione $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Dal Teorema dei residui, per $R > 1$ abbiamo

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(\frac{1}{1+z^4}, z_0) + \mathrm{Res}(\frac{1}{1+z^4}, z_1)) = \frac{\pi i}{2}(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Poichè $\frac{z}{1+z^4} \to 0$ per $|z| \to \infty$, dal Lemma del grande cerchio, per $R \to +\infty$ abbiamo

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\, dz \to 0.$$

Dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} \frac{1}{1+z^4}\, dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

• Calcoliamo il valore dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Sappiamo che tale integrale risulta convergente, ma non assolutamente. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fissati $0 < r < R$, sia $\Gamma_{r,R}$ la curva avente per supporto la frontiera dell'insieme $D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z| < R,\ Im(z) > 0\}$ percorsa in senso antiorario. Poichè $f(z)$ risulta olomorfa in un $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\Gamma_{r,R}$ è curva chiusa omotopa ad un punto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dal Teorema di Cauchy generalizzato abbiamo che

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\, dz = 0.$$

Determiniamo ora una parametrizzazione di $\Gamma_{r,R}$. Abbiamo che $\Gamma_{r,R} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r,] \cup \Gamma_r$, essendo

$$\Gamma_r(t) = re^{i(\pi-t)},\ t \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \Gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [0, \pi].$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)\,dz &= \int_{[r,R]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{[-R-r]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz \\ &= \int_r^R \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.\end{aligned}$$

Poichè $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z} = 0$, dal Lemma di Jordan abbiamo che

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to 0, \quad \text{per } R \to +\infty.$$

Inoltre, essendo $\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} e^{iz} = 1$, dal Lemma del piccolo cerchio otteniamo che

$$\int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \to -i\pi, \quad \text{per } r \to 0^+.$$

Infine, osserviamo che

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}\,dt = -\int_r^R \frac{e^{-it}}{t}\,dt$$

Allora, per quanto appena provato risulta

$$\int_r^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t}\,dt = -\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} - \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} \to i\pi, \quad \text{per } R \to +\infty,\ r \to 0^+$$

e dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \frac{e^{it} - e^{-it}}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

- Calcoliamo l'integrale improprio

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

Innanzitutto osserviamo che tale integrale risulta convergente per ogni α reale, essendo $|\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}| \le \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che $F(-\alpha) = F(\alpha)$. Osserviamo ora che $\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}$ risulta essere la parte reale della funzione $\frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}$, calcoliamo dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

A tale scopo consideriamo la curva Γ_R frontiera positivamente orientata del dominio $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R, Im(z) > 0\}$. Abbiamo allora che $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ essendo $\gamma_R = \mathcal{C}_R(0) \cap D$. Dal Lemma di Jordan, essendo $\frac{1}{1+z^2} \to 0$ per $|z| \to +\infty$, otteniamo che per ogni $\alpha > 0$ risulta

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}\,dz \to 0$$

per $R \to +\infty$. Se $\alpha = 0$, dal Lemma del grande cerchio, essendo $\frac{z}{1+z^2} \to 0$ per $|z| \to +\infty$, otteniamo che

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz \to 0$$

per $R \to +\infty$. Inoltre, dal Teorema dei residui, poichè $\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}$ ha un unico polo semplice in D_R con $R > 1$ nel punto i con

$$\mathrm{Res}(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, i) = \frac{e^{-\alpha}}{2i},$$

per $R > 1$ abbiamo che

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, i) = \pi e^{-\alpha}.$$

Dunque, per $\alpha \geq 0$ otteniamo

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}\, dz = \pi e^{-\alpha}$$

da cui

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} Re(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2})\, dz = \pi e^{-\alpha}.$$

Avendo osservato che $F(-\alpha) = F(\alpha)$, ne concludiamo che

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

5. Appendice: Residuo all'infinito

Diciamo che una funzione $f(z)$ ha una singolarità isolata a ∞ se risulta olomorfa in $S_R := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\}$ per qualche $R > 0$. Considerata la funzione $g(z) = f(\frac{1}{z})$, posto $r = \frac{1}{R}$ abbiamo allora che $g(z)$ risulta olomorfa in $\mathcal{B}_r(0) \setminus \{0\}$ e dunque che $z_0 = 0$ risulta una singolarità isolata di $g(z)$.
Se $z_0 = 0$ è singolarità eliminabile (rispettivamente, un polo di ordine m, una singolarità essenziale) per $g(z)$ diremo che $f(z)$ presenta una singolarità eliminabile (rispettivamente, un polo di ordine m, una singolarità essenziale) a ∞.
In particolare, se

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in S_R$$

è lo sviluppo di Laurent di $f(z)$, avremo

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad \forall z \in S_R$$

Dunque ∞ risulta una singolarità eliminabile per $f(z)$ se $a_n = 0$ per ogni $n > 0$, ovvero se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}, \quad \forall z \in S_R,$$

risulta un polo di ordine m se $a_n = 0$ per ogni $n > m$ mentre $a_m \neq 0$, quindi se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_m z^m, \quad \forall z \in S_R.$$

Infine avremo una singolarità essenziale se $a_n \neq 0$ per infiniti indici $n > 0$.

Dai Teoremi di caratterizzazione delle singolarità segue inoltre che

(*i*) ∞ *è singolarità eliminabile per* $f(z)$ *se e solo se*

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C};$$

(*ii*) ∞ *è un polo per* $f(z)$ *se e solo se*

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty.$$

In particolare, è un polo di ordine $m \in \mathbb{N}$ *se e solo se*

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

(*iii*) ∞ *è una singolarità essenziale per* $f(z)$ *se e solo se non esiste il limite*

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)|.$$

Osserviamo inoltre che dal Teorema di sviluppabilità in serie di Laurent per la funzione $f(z)$, essendo a_n il coefficiente della potenza z^n risulta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

essendo $\rho > R$. Operando il cambiamento di variabile $w = \frac{1}{z}$, osservato che $w = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{C}_\rho(0)$ se e solo se $z = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \in -\mathcal{C}_{\frac{1}{\rho}}(0)$, otteniamo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{C}_{\frac{1}{\rho}}(0)} \frac{g(z)}{z^{n-1}} \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{\frac{1}{\rho}}(0)} \frac{g(z)}{z^{1-n}}\, dz, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Si chiama residuo di $f(z)$ all'∞ il valore

$$\mathrm{Res}(f, \infty) := -a_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho(0)} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{C}_\rho(0)} f(z)\, dz$$

dove $\rho > R$. Da quanto osservato sopra abbiamo allora che

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}(\frac{g(z)}{z^2}, 0)$$

Vale inoltre

TEOREMA 4.10. (DEI RESIDUI ALL'∞)
Sia $f(z)$ funzione olomorfa in S_R per qualche $R > 0$ eccetto al più un numero finito $z_1, z_2, ..., z_n$ di singolarità isolate e sia D un dominio normale regolare tale che $\mathcal{B}_R(0) \subset D$ per cui $z_k \notin \partial D$ per ogni $k = 1, 2, ...n$ allora

$$\int_{\partial^+ D} f(w)\, dw = -2\pi i(\mathrm{Res}(f, \infty) + \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus D} \mathrm{Res}(f, z_k)).$$

CAPITOLO 5

Misura e Integrale di Lebesgue

1. Costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Denoteremo nel seguito con $\mathcal{P}$ la famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^n$ ovvero dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ della forma

$$P = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \subset \mathbb{R}^n$$

essendo $I_k \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato, eventualmente vuoto o costituito da un unico punto, per ogni $k = 1, .., n$. Definiamo, in accordo con i concetti di lunghezza, area e volume, la misura di un plurintervallo ponendo per ogni $P \in \mathcal{P}$

$$m(P) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

essendo $P = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ e $a_k \leq b_k$ gli estremi dell'intervallo I_k per ogni $k = 1, .., n$, con la convenzione che $m(\emptyset) = 0$.

Possiamo estendere in modo naturale il concetto di misura alla famiglia degli insiemi elementari $\mathcal{E}_0$ costituita da unioni *finite* di plurintervalli: $E \in \mathcal{E}_0$ se esistono un numero *finito* di plurintervalli $P_k \in \mathcal{P}$, $k = 1, 2, ..., n$, tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} P_k.$$

È immediato che *unione, intersezione e differenza di insiemi elementari è insieme elementare.*

Si definisce allora la misura m di un insieme $E \in \mathcal{E}_0$ ponendo

$$m(E) := \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

essendo $E = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}$ a due a due disgiunti (dove qui e nel seguito intendiamo che due insiemi sono disgiunti se sono privi di punti interni comuni).

Tale definizione non dipende dalla decomposizione dell'insieme in plurintervalli disgiunti.

Infatti, se $E = \cup_k P_k = \cup_j Q_j$, dove $P_k \in \mathcal{P}$ e $Q_j \in \mathcal{P}$ sono a due a due disgiunti allora, essendo $P_k \cap Q_j \in \mathcal{P}$ e la misura m additiva in $\mathcal{P}$ (i.e. $m(P \cup Q) = m(P) + m(Q)$ per ogni $P, Q \in \mathcal{P}$ disgiunti), otteniamo

$$\sum_k m(P_k) = \sum_k m(\cup_j P_k \cap Q_j) = \sum_k \sum_j m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(\cup_k P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j).$$

Osserviamo che $m(E) \geq 0$ per ogni $E \in \mathcal{E}_0$ e che tale misura verifica le seguenti proprietà in $\mathcal{E}_0$:

- *invarianza per traslazione*: se $E \in \mathcal{E}_0$ allora per ogni $r \in \mathbb{R}^n$ risulta $m(E) = m(E + r)$ (dove $E + r = \{x + r \,|\, x \in E\}$);
- *monotonia*: se $E \subset F \in \mathcal{E}_0$ allora $m(E) \leq m(F)$,
- *additività*: per ogni $E, F \in \mathcal{E}_0$ disgiunti risulta $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$,

Proviamo che vale inoltre la seguente proprietà

TEOREMA 5.1. (σ-SUBADDITIVITÀ)
Se $E \in \mathcal{E}_0$ è tale che $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ dove $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_0$, allora

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

DIM. Dato $E \in \mathcal{E}_0$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che esiste un chiuso $F \in \mathcal{E}_0$ tale che $F \subset E$ e $m(F) \geq m(E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre, per ogni $E_k \in \mathcal{E}_0$ esiste un aperto $A_k \in \mathcal{E}_0$ tale che $E_k \subset A_k$ e

$$m(A_k) \leq m(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Allora $F \subset \bigcup_k A_k$ e dunque, dal Teorema di Heine-Borel, esiste una sottofamiglia finita $A_{k_1}, ..., A_{k_n}$ tale che $F \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{k_j}$. Dalla proprietà di monotonia e di additività si ha allora che

$$m(F) \leq m(\bigcup_{j=1}^{n} A_{k_j}) = \sum_{j=1}^{n} m(A_{k_j}) \leq \sum_k m(A_k)$$

e dunque che

$$m(E) \leq m(F) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_k m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_k (m(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_k m(E_k) + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

Dalle proprietà di additività e di σ-subadditività segue che la misura m su $\mathcal{E}_0$ verifica anche la proprietà di *σ-additività*, ovvero *se $E \in \mathcal{E}_0$ è tale che $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, dove $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_0$ sono a due a due disgiunti, allora*

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Infatti, per ogni $N \in \mathbb{N}$ risulta $\bigcup_{k=1}^{N} E_k \subset E$ e dunque dalle proprietà di monotonia e di additività si ottiene

$$m(E) \geq m(\bigcup_{k=1}^{N} E_k) = \sum_{k=1}^{N} m(E_k)$$

e quindi, passando al limite per $N \to +\infty$, otteniamo $\sum_{k=1}^{\infty} m'(E_k) \leq m(E)$. Dalla proprietà di σ-subadditività segue allora che $m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$.

Sia ora A un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, definiamo la misura esterna di A, $\mu^*(A)$, ponendo

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_k m(P_k) \,|\, P_k \in \mathcal{P},\, A \subset \bigcup_k P_k\} \in [0, +\infty].$$

Dalla proprietà di σ-subadditività si ha che μ^* estende la misura m nel senso che se $A \in \mathcal{E}_0$ allora, $\mu^*(A) = m(A)$. Valgono inoltre le seguenti proprietà

- *invarianza per traslazione*: per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ e ogni $r \in \mathbb{R}^n$ risulta $\mu^*(A) = \mu^*(A + r)$;
- *monotonia*: se $A \subset B$ allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Osserviamo inoltre che se $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}$ a due a due disgiunti, allora

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(P_k).$$

Infatti, dalla definizione di misura esterna si ha che $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(P_k)$. Per provare la diseguaglianza opposta osserviamo che per ogni $K \in \mathbb{N}$ risulta $\bigcup_{k=1}^{K} P_k \subset A$ e dunque dall'additività di m e dalla monotonia di μ^* otteniamo

$$\sum_{k=1}^{K} m(P_k) = m(\bigcup_{k=1}^{K} P_k) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{K} P_k) \leq \mu^*(A)$$

e passando al limite per $K \to +\infty$, concludiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) \leq \mu^*(A)$.

Ne segue in particolare che *ogni insieme numerabile $A \subset \mathbb{R}^n$ ha misura esterna nulla*. Infatti, se $A = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ allora $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\{x_i\}) = 0$. In particolare si ottiene che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ ha misura esterna nulla in $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che *se $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ allora la sua misura esterna (in $\mathbb{R}^n$) è nulla.*

Vale inoltre

Teorema 5.2. (σ-subadditività)
Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi A_k di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Dim. Dalla definizione di misura esterna, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste $P_{j,k} \in \mathcal{P}$ tale che $A_k \subset \bigcup_j P_{j,k}$ e

$$\sum_j m(P_{j,k}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Allora $A \subset \bigcup_k \bigcup_j P_{j,k}$ e dalla definizione di misura esterna otteniamo

$$\mu^*(A) \leq \sum_k \sum_j m(P_{j,k}) \leq \sum_k (\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

Si può provare che la misura esterna non soddisfa la proprietà di additività (paradosso di Banach), tale proprietà risulta verificata (si veda il prossimo Teorema 5.5) se consideriamo tale misura ristretta ad un'opportuna famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, gli insiemi misurabili.

Denotata con $\mathcal{E}$ la famiglia delle unioni *al più numerabili* di plurirettangoli, diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile (secondo Lebesgue) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E \in \mathcal{E}$ tale che

$$\mu^*(E \triangle A) < \varepsilon,$$

essendo $E \triangle A = (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$ la differenza simmetrica tra gli insiemi E e A. Denoteremo con $\mathcal{M}$ la famiglia di insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$.

Dalla definizione segue immediatamente che $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ ed in particolare che *gli insiemi elementari sono misurabili.* Risulta quindi misurabile $\mathbb{R}^n$ ed inoltre, essendo ogni aperto unione numerabile di plurirettangoli, *ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ risulta misurabile.* Si ha inoltre che *ogni insieme di misura esterna nulla è misurabile* (basta considerare per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $E = \emptyset \in \mathcal{E}$ ed osservare che $E \triangle A = A$).

Vale poi il seguente risultato

Teorema 5.3.
Se A e B sono insiemi misurabili allora $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ sono misurabili.

Dim. Proviamo innanzitutto che se $A, B \in \mathcal{M}$ allora $A \cup B \in \mathcal{M}$. A tale scopo osserviamo che dalla definizione, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $E, F \in \mathcal{E}$ tali $\mu^*(E \triangle A) < \varepsilon/2$ e $\mu^*(F \triangle B) < \varepsilon/2$. Inoltre, essendo $(E \cup F) \triangle (A \cup B) \subset (E \triangle A) \cup (F \triangle B)$, dalla monotonia e dalla σ-subadditività di μ^* abbiamo $\mu^*((E \cup F) \triangle (A \cup B)) \leq \mu^*(E \triangle A) + \mu^*(F \triangle B) \leq \varepsilon$ e poichè $E \cup F \in \mathcal{E}$, ne segue che $A \cup B \in \mathcal{M}$.
Proviamo ora che se $A, B \in \mathcal{M}$ allora $A \cap B \in \mathcal{M}$. Osserviamo innanzitutto che se $A \in \mathcal{M}$ allora $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}$ (difatti per ogni $E \in \mathcal{E}$ risulta $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{E}$ e $E \triangle A = (\mathbb{R}^n \setminus E) \triangle (\mathbb{R}^n \setminus A)$). Presi allora $A, B \in \mathcal{M}$ è sufficiente osservare che $A \cap B = \mathbb{R}^n \setminus [(\mathbb{R}^n \setminus A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)]$ e dunque, per quanto sopra, $A \cap B \in \mathcal{M}$.
Infine, per provare che se $A, B \in \mathcal{M}$ allora $A \setminus B \in \mathcal{M}$, per quanto appena provato è sufficiente osservare che $A \setminus B = A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$. □

Vale inoltre

Teorema 5.4.
$\mathcal{M}$ è una σ-algebra, ovvero se $A_k \in \mathcal{M}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

Dim. Sia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili e sia $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $k \in \mathbb{N}$, poichè ogni $A_k \in \mathcal{M}$, abbiamo che esiste $E_k \in \mathcal{E}$ tale che

$$\mu^*(E_k \triangle A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Posto $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, abbiamo che $E \in \mathcal{E}$ e $E \triangle A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \triangle A_k)$. Dalla σ-subadditività della misura esterna segue allora che

$$\mu^*(E \triangle A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k \triangle A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

e dunque che $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.
Infine, essendo, dal Teorema 2, misurabili i complementari di insiemi misurabili, otteniamo

che $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ essendo

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_k).$$

□

Vale il seguente risultato che prova che la misura esterna risulta additiva in $\mathcal{M}$

TEOREMA 5.5. (ADDITIVITÀ)
Se A e B sono insiemi misurabili disgiunti allora $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

DIM. Proviamo innanzitutto che μ^* è additiva in $\mathcal{E}$. A tale scopo osserviamo che dalla proprietà di σ-subadditività è sufficiente provare che se $A, B \in \mathcal{E}$ sono insiemi disgiunti allora

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B). \tag{19}$$

Siano $(P_k)_k \in \mathcal{P}$ e $(Q_j)_j \in \mathcal{P}$ disgiunti tali che $A = \bigcup_k P_k$ e $B = \bigcup_j Q_j$. Allora, per quanto già visto, risulta

$$\mu^*(A) = \sum_k m(P_k) \quad \text{e} \quad \mu^*(B) = \sum_j m(Q_j).$$

Se una delle due serie risulta divergente allora (19) è immediata. Se entrambe le serie risultano convergenti, preso comunque $\varepsilon > 0$, siano $N, M \in \mathbb{N}$ tali che

$$\sum_{k>N} m(P_k) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{j>M} m(Q_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, posto $A_N = \bigcup_{k=1}^{N} P_k$ e $B_M = \bigcup_{j=1}^{M} Q_j$, essendo A e B disgiunti e la misura m additiva su $\mathcal{E}_0$, otteniamo

$$\begin{aligned}\mu^*(A) + \mu^*(B) &= \sum_k m(P_k) + \sum_j m(Q_j) \leq \sum_{k=1}^{N} m(P_k) + \sum_{j=1}^{M} m(Q_j) + \varepsilon \\ &= m(A_N) + m(B_M) + \varepsilon = m(A_N \cup B_M) + \varepsilon = \mu^*(A_N \cup B_M) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Poichè $A_N \cup B_M \subset A \cup B$ e μ^* è monotona ne deduciamo che

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di ε segue (19).

Proviamo ora che μ^* risulta additiva in tutto $\mathcal{M}$. Siano allora $A, B \in \mathcal{M}$ disgiunti. Preso $\varepsilon > 0$, siano $E, F \in \mathcal{E}$ tali che $\mu^*(E \triangle A) < \varepsilon$ e $\mu^*(F \triangle B) < \varepsilon$. Abbiamo allora che $E \cup F \in \mathcal{E}$ ed inoltre, dal Teorema 2, che $A \cup B \in \mathcal{M}$. Poichè $A \cap B = \emptyset$ abbiamo che $E \cap F \subset (E \triangle A) \cup (F \triangle B)$ e dunque, dalla σ-subadditività di μ^*,

$$\mu^*(E \cap F) \leq \mu^*(E \triangle A) + \mu^*(F \triangle B) < 2\varepsilon$$

Poichè per quanto provato sopra μ^* è additiva in $\mathcal{E}$, abbiamo che

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F) - \mu^*(E \cap F) > \mu^*(E) + \mu^*(F) - 2\varepsilon \tag{20}$$

Inoltre, essendo $A \subset E \cup (E \triangle A)$ abbiamo che $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \mu^*(E \triangle A) < \mu^*(E) + \varepsilon$ e, analogalmente, si ha che $\mu^*(B) < \mu^*(F) + \varepsilon$. Da (20) otteniamo allora che

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) < \mu^*(E) + \mu^*(F) + 2\varepsilon < \mu^*(E \cup F) + 4\varepsilon \tag{21}$$

Ora, essendo $\mu^*(E \cup F) < \mu^*(A \cup B) + \mu^*((E \cup F) \triangle (A \cup B))$ e $(E \cup F) \triangle (A \cup B)) \subset (E \triangle A) \cup (F \triangle B)$, otteniamo che

$$\mu^*(E \cup F) < \mu^*(A \cup B) + \mu^*(E \triangle A) + \mu^*(F \triangle B) < \mu^*(A \cup B) + 2\varepsilon$$

Da (21) segue allora che

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) < \mu^*(A \cup B) + 6\varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di ε segue che $\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B)$. Poichè la disuguaglianza opposta è sempre valida (per la σ-subsdditivita di μ^*), otteniamo la tesi. $\square$

Denoteremo con μ la restrizione della misura esterna μ^* a $\mathcal{M}$:

$$\mu(A) := \mu^*(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

Tale misura è detta misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ e per quanto provato tale misura risulta additiva e σ-subadditiva. Segue allora che la misura di Lebesgue in $\mathcal{M}$ è *σ-additiva*, ovvero *se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti allora*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Utilizzando la σ-additività della misura si può inoltre provare il seguente risultato di *continuità* della misura di Lebesgue lungo successioni "monotone"

Teorema 5.6. (continuità della misura)

(*i*) *Se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili tali che $A_k \subset A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

(*ii*) *se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili tali che $A_{k+1} \subset A_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e se $\mu(A_1) < +\infty$ allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$$

Concludiamo con un esempio di insieme non misurabile, dovuto a E. Vitali. Nell'insieme $(0,1) \subset \mathbb{R}$ definiamo la seguente relazione: diciamo che $x, y \in (0,1)$ sono equivalenti se $x - y = r \in \mathbb{Q}$. Scegliamo in $(0,1)$ un ed un solo elemento per ciascuna classe di equivalenza e denotiamo con $V \subset (0,1)$ l'insieme costituito da tali punti: abbiamo quindi che se $u, v \in V$, con $u \neq v$, allora $u - v \notin \mathbb{Q}$ e che per ogni $x \in (0,1)$ esiste $v \in V$ tale che $x - v \in \mathbb{Q}$. Tale insieme non risulta misurabile secondo Lebesgue.

Per assurdo supponiamo che V risulti misurabile. Per ogni $q \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$ sia $V_q = q + V$. Avremo allora che, per ogni $q \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$, $V_q \subset (-1,2)$ è misurabile con $\mu(V_q) = \mu(V)$ e che $V_q \cap V_p = \emptyset$ per ogni $p \neq q$. Infatti se $x \in V_q \cap V_p$ allora, per definizione, esistono $u, v \in V$ tali che $u + q = x = v + p$ e dunque $u - v = p - q \in \mathbb{Q}$. Per la scelta di V avremo allora $u = v$ e dunque $p = q$. Sia ora

$$U = \bigcup_{q\in(-1,1)\cap\mathbb{Q}} V_q,$$

avremo che U è misurabile e dalla proprietà di σ-additività risulta

$$\mu(U) = \sum_{q\in(-1,1)\cap\mathbb{Q}} \mu(V_q) = \sum_{q\in(-1,1)\cap\mathbb{Q}} \mu(V)$$

Poichè $U \subset (-1,2)$ avremo $\mu(U) \leq 3$ e dunque la precedente uguaglianza sarà valida solo se $\mu(V) = 0$ da cui $\mu(U) = 0$. D'altra parte, osserviamo che per ogni $x \in (0,1)$ esiste $v \in V$ tale che $x - v = q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ ovvero risulta $x \in V_q$. Ne segue che $(0,1) \subset U$ e dunque la contraddizione $\mu(U) \geq 1$.

2. Funzioni misurabili

Dato un insieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta misurabile su E se per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sopralivello

$$f_a := \{x \in E \,|\, f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$$

risulta misurabile.

Osserviamo che, dalle proprietà di $\mathcal{M}$ segue che se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è misurabile allora risultano misurabili i sottolivelli

$$f^b := \{x \in E \,|\, f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b)), \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

Un esempio elementare di funzione misurabile è dato dalla funzione caratteristica χ_E di un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

Ad esempio, la funzione di Dirichlet è la funzione caratteristica dell'insieme $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, ed essendo E misurabile, tale funzione risulta misurabile.

Poichè la controimmagine di aperti mediante funzioni continue sono aperti e dunque misurabili, *le funzioni continue su un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ sono misurabili.* Si ha inoltre che *somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni misurabili sono misurabili* e che *limiti puntuali di funzioni misurabili sono misurabili.*

Una funzione misurabile $s : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta funzione semplice se assume un numero al più numerabile di valori distinti (un esempio è dato dinuovo dalla funzione di Dirichlet, la funzione parte intera è altro esempio di funzione semplice, così come le funzioni costanti a tratti).
Osserviamo che se $a_1, a_2, ..., a_k, ...$ sono i valori distinti assunti dalla funzione semplice $s(x)$ in E potremo scrivere

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{E_k}(x), \quad x \in E,$$

essendo $E_k = \{x \in E \,|\, s(x) = a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, insiemi misurabili a due a due disgiunti. Denoteremo nel seguito con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni semplici in $\mathbb{R}^n$. Vale il seguente risultato

TEOREMA 5.7.
Una funzione misurabile è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici.

DIM. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$ poniamo

$$s_n(x) = \frac{m-1}{2^n} \quad \text{se } \tfrac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{m}{2^n} \text{ per qualche } m \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$s_n(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{m-1}{2^n} \chi_{E_{m,n}}(x)$$

dove $E_{m,n} = \{x \in E \,|\, \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n}\}$. Allora, essendo $f(x)$ misurabile avremo $E_{m,n} \in \mathcal{M}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ e dunque che ogni $s_n(x)$ risulta misurabile in E. Inoltre si ha $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$ per $n \to +\infty$. Infine osservato che

$$\begin{aligned} &\{x \in E \,|\, \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n}\} \\ &\qquad = \{x \in E \,|\, \frac{2m-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m-1}{2^{n+1}}\} \cup \{x \in E \,|\, \frac{2m-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m}{2^{n+1}}\}, \end{aligned}$$

si ha che se $s_n(x) = \frac{m-1}{2^n}$ allora $x \in \{x \in E \,|\, \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n}\}$ e dunque $x \in \{x \in E \,|\, \frac{2m-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m-1}{2^{n+1}}\}$, da cui $s_{n+1}(x) = \frac{2m-2}{2^{n+1}} = s_n(x)$, oppure $x \in \{x \in E \,|\, \frac{2m-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m}{2^{n+1}}\}$, da cui $s_{n+1}(x) = \frac{2m-1}{2^{n+1}} > s_n(x)$. Ne segue allora che $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ per ogni $x \in E$ e dunque che la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ risulta crescente in E. □

3. Definizione dell'integrale di Lebesgue

Definiamo innanzitutto l'integrale di Lebesgue per una funzione semplice. Data una funzione semplice non negativa $s : E \subset \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ poniamo

$$\int_E s(x)\, dx := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(E_k) \tag{22}$$

essendo $a_1, a_2, ..., a_k, ...$ i valori distinti assunti dalla funzione semplice $s(x)$ e $E_k = \{x \in E \,|\, s(x) = a_k\}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, con la convenzione che se $a_k = 0$ e $\mu(E_k) = +\infty$ allora $a_k \mu(E_k) = 0$. Osserviamo che la serie in (22) è serie a termini non negativi, dunque regolare, e quindi che $\int_E s(x)\, dx$ risulta sempre definito, eventualmente pari a $+\infty$.

Dalla definizione e dalla proprietà della misura seguono inoltre le seguenti proprietà

- *linearità:* Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e ogni $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ non negative in $E \in \mathcal{M}$ risulta che $\alpha s_1 + \beta s_2 \in \mathcal{S}$ e vale
$$\int_E \alpha s_1(x) + \beta s_2(x)\, dx = \alpha \int_E s_1(x)\, dx + \beta \int_E s_2(x)\, dx;$$
- *monotonia:* Se $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ e $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x)$ per ogni $x \in E$ allora
$$\int_E s_1(x)\, dx \leq \int_E s_2(x)\, dx;$$

- Se $s \in \mathcal{S}$ non negativa in $E \in \mathcal{M}$ e A è sottoinsieme misurabile di E allora
$$\int_A s(x)\,dx \leq \int_E s(x)\,dx$$
- *additività:* Se $s \in \mathcal{S}$ non negativa in $E \in \mathcal{M}$ e A, B sono sottoinsiemi misurabili disgiunti di E allora
$$\int_{A\cup B} s(x)\,dx = \int_A s(x)\,dx + \int_B s(x)\,dx$$
- *σ-additività:* Se $s \in \mathcal{S}$ non negativa in $E \in \mathcal{M}$ e A_k, $k \in \mathbb{N}$, sono sottoinsiemi misurabili disgiunti di E allora, posto $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, risulta
$$\int_A s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} s(x)\,dx$$

Dalla definizione si ha in particolare che per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ risulta
$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\,dx = \mu(E)$$
Da cui ad esempio otteniamo che la funzione di Dirichlet ha integrale nullo
$$\int_{[0,1]} D(x)\,dx = \int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,dx = \mu(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0.$$

Sia ora $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione *non negativa* e misurabile sull'insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$, e sia $s_n : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una successione crescente di funzioni semplici non negative convergente puntualmente ad $f(x)$ in E. Si definisce integrale di Lebesgue di $f(x)$ in E il limite
$$\int_E f(x)\,dx := \lim_{n\to+\infty} \int_E s_n(x)\,dx$$
Osserviamo che essendo la successione crescente il limite a secondo membro esiste (eventualmente infinito). Si può inoltre provare che tale definizione non dipende dalla successione approssimante scelta.

Una definizione alternativa può essere data utilizzando il seguente risultato

Teorema 5.8.
Sia $f(x)$ funzione misurabile non negativa nell'insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora
$$\int_E f(x)\,dx = \sup\{\int_E s(x)\,dx \,|\, s \in \mathcal{S}, 0 \leq s(x) \leq f(x)\ \forall x \in E\}.$$

Dim. Sia $s_n : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ crescente di funzioni semplici non negative convergente puntualmente ad $f(x)$ in E. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $s_n \in \mathcal{S}$ e $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$. Allora posto
$$I = \sup\{\int_E s(x)\,dx \,|\, s \in \mathcal{S}, 0 \leq s(x) \leq f(x)\ \forall x \in E\},$$

risulta $I \geq \int_E s_n(x)\,dx$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi dalla definizione si ottiene

$$I \geq \int_E f(x)\,dx$$

Viceversa, dalla definizione di estremo superiore, preso comunque $\varepsilon > 0$, sia $s_1 \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq s_1(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$ e

$$\int_E s_1(x)\,dx \geq I - \frac{\varepsilon}{2}$$

Poniamo

$$I_1 = \sup\{\int_E s(x)\,dx \,|\, s \in \mathcal{S}, s_1(x) \leq s(x) \leq f(x)\ \forall x \in E\},$$

e sia $s_2 \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$ e

$$\int_E s_2(x)\,dx \geq I_1 - \frac{\varepsilon}{4} \geq \int_E s_1(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} \geq I - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Procedendo per induzione, si ottiene una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tali che $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$ e

$$\int_E s_{n+1}(x)\,dx \geq I - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Poichè $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è successione crescente, sia $g(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x)$ per ogni $x \in E$. Otteniamo allora che $g(x)$ è misurabile e che, per definizione,

$$\int_E g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E s_{n+1}(x)\,dx \geq I - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = I - \varepsilon$$

Essendo $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$ ne segue che

$$\int_E f(x)\,dx \geq \int_E g(x)\,dx \geq I - \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo la tesi. □

Se $f(x)$ è funzione misurabile sull'insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$, potremo decomporla come differenza della sua parte positiva e negativa: $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ essendo

$$f^+(x) := \max\{f(x); 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) := \max\{-f(x); 0\}, \quad \forall x \in E,$$

funzioni misurabili e non negative in E. Se almeno uno dei due integrali $\int_E f^{\pm}(x)\,dx$ è finito, si dice integrale di Lebesgue di $f(x)$ su E la quantità

$$\int_E f(x)\,dx := \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$$

Se $\int_E f(x)\,dx$ è finito (ovvero se $\int_E f^{\pm}(x)\,dx$ sono entrambi finiti) , si dice che $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è integrabile (o sommabile) secondo Lebesgue su E. La famiglia delle funzioni a valori reali sommabili in E verrà denotata con $\mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$.

Osserviamo che essendo $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, si ha che *una funzione $f(x)$ risulta sommabile in E se e solo se risulta tale $|f(x)|$*. Possiamo quindi

scrivere

$$\mathcal{L}^1(E;\mathbb{R}) = \{f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ misurabili} \,|\, \int_E |f(x)|\,dx < +\infty\}.$$

Osserviamo inoltre che se $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è funzione semplice allora $s(x)$ risulta sommabile in $\mathbb{R}^n$ se e solo se la serie in (22) è convergente.

Utilizzando la definizione si possono provare le seguenti proprietà dell'integrale di Lebesgue

- *linearità:* Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e ogni $f, g \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ risulta che $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e vale
$$\int_E \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx;$$
- *monotonia:* Se $f, g \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in E$ allora
$$\int_E f(x)\,dx \le \int_E g(x)\,dx;$$
- Se $f \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e A è sottoinsieme misurabile di E allora $f \in \mathcal{L}^1(A;\mathbb{R})$ e
$$\int_A |f(x)|\,dx \le \int_E |f(x)|\,dx$$
- *additività:* Se $f \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e A, B sono sottoinsiemi misurabili disgiunti di E allora
$$\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$
- *σ-additività:* Se $f \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e A_k, $k \in \mathbb{N}$, sono sottoinsiemi misurabili disgiunti di E allora, posto $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, risulta
$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x)\,dx;$$
- Se $\varphi \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e f è misurabile in E con $|f(x)| \le \varphi(x)$ per ogni $x \in E$, allora $f \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$.

Infine, se $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, diremo che $f(x)$ è misurabile sull'insieme misurabile E se risultano tali la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Allo stesso modo, diremo che $f(x)$ è sommabile in E se sono tali la sua parte reale e la sua parte immaginaria. In tal caso, se $f(x) = u(x) + iv(x)$, dove $u, v : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si pone

$$\int_E f(x)\,dx := \int_E u(x)\,dx + i \int_E v(x)\,dx \in \mathbb{C}$$

Denoteremo con $\mathcal{L}^1(E;\mathbb{C})$ la famiglia delle funzioni a valori complessi sommabili in E. Come nel caso di funzioni a valori reali abbiamo che $f \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{C})$ se e solo se $|f| \in \mathcal{L}^1(E;\mathbb{R})$ e possiamo scrivere

$$\mathcal{L}^1(E;\mathbb{C}) = \{f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ misurabili} \,|\, \int_E |f(x)|\,dx < +\infty\}.$$

Le proprietà elencate per l'integrale di funzioni reali possono essere estesi all'integrale di funzioni complesse eccetto le proprietà che coinvolgono l'ordinamento di $\mathbb{R}$.

Considerata una famiglia $P(x)$ di proposizioni dipendenti da $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, diremo che $P(x)$ è vera quasi ovunque (per brevità q.o.) se l'insieme $\{x \in E \,|\, P(x) \text{ è falsa}\}$ è misurabile di misura nulla.
Ad esempio, affermare che $f(x) = g(x)$ q.o. in E significa che $\mu(\{x \in E \,|\, f(x) \neq g(x)\}) = 0$: ad esempio abbiamo che la funzione di Dirichlet è q.o. nulla in $[0,1]$ essendo $\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$.
Osserviamo che, dalla definizione di integrale, *se $f(x) = g(x)$ q.o. in E e $g(x)$ risulta sommabile in E allora anche $f(x)$ risulta sommabile in E e*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx$$

Viceversa, abbiamo che *se $\int_E |f(x)|\,dx = 0$ allora $\mu(E) = 0$ oppure $f(x) = 0$ per q.o. $x \in E$.*
Nel seguito penseremo quindi identificate in $\mathcal{L}^1(E;\mathbb{C})$ funzioni q.o. uguali e scriveremo che $f = g$ in $\mathcal{L}^1(E;\mathbb{C})$ intendendo che $f(x) = g(x)$ per q.o. $x \in E$.

4. Confronto tra l'integrale di Lebesgue e di Riemann

Mostreremo nel prossimo risultato che ogni funzione limitata integrabile secondo Riemann in un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ risulta integrabile secondo Lebesgue in tale intervallo e che i due integrali coincidono. Vedremo inoltre che affinchè una funzione risulti integrabile secondo Riemann questa dovrà soddisfare a delle condizioni di continuità piuttosto restrittive. Abbiamo quindi che la teoria dell'integrazione di Lebesgue estende la teoria di Riemann ad una classe molto più ampia di funzioni. Altro vantaggio è che, utilizzando l'integrale di Lebesgue, risultano semplificate le ipotesi per il passaggio al limite sotto il segno integrale (si veda la prossima sezione), risultati che torneranno utili nel seguito.

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, denoteremo nel seguito con $\int_a^b f(x)\,dx$ l'integrale di Riemann e con $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$ l'integrale di Lebesgue. Vale allora

Teorema 5.9.
Se $f(x)$ è funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,b]$ allora $f(x)$ è integrabile secondo Lebesgue in $[a,b]$ e

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dim. Dalla definizione di integrale di Riemann, sia $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di partizioni di $[a,b]$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $P_k \subset P_{k+1}$, $|x-y| < \frac{1}{k}$ per ogni $x, y \in P_k$ e

$$\lim_{k\to+\infty} S(P_k) = S(f) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} s(P_k) = s(f)$$

dove ricordiamo che se $P = \{a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b\}$ allora

$$S(P) := \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad \text{e} \quad s(P) := \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

mentre

$$S(f) := \inf\{S(P) \,|\, P \text{ partizione di } [a,b]\} \quad \text{e} \quad s(f) := \sup\{s(P) \,|\, P \text{ partizione di } [a,b]\}$$

Per ogni partizione $P_k = \{a = x_0^k < x_1^k < .... < x_{n_k}^k = b\}$ poniamo

$$U_k(a) = f(a) \quad \text{e} \quad U_k(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_i^k, x_{i+1}^k]\}, \quad \text{se } x_i^k < x \le x_{i+1}^k$$

e

$$L_k(a) = f(a) \quad \text{e} \quad L_k(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_i^k, x_{i+1}^k]\}, \quad \text{se } x_i^k < x \le x_{i+1}^k.$$

Allora, dalla definizione si ha

$$\int_{[a,b]} U_k(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_i, x_{i+1}]\} \mu([x_i, x_{i+1}]) = S(P_k)$$

e analogalmente

$$\int_{[a,b]} L_k(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_i, x_{i+1}]\} \mu([x_i, x_{i+1}]) = s(P_k)$$

Inoltre poichè per ogni $x \in [a,b]$ risulta $L_k(x) \le L_{k+1}(x) \le f(x) \le U_{k+1}(x) \le U_k(x)$, le successioni $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ammettono dunque limite puntuale che denotiamo rispettivamente con $L(x)$ e $U(x)$. Tali funzioni, in quanto limiti di funzioni semplici, sono misurabili in $[a,b]$ e, dalla definizione di integrale di Lebesgue, risulta

$$\int_{[a,b]} U(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{[a,b]} U_k(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} S(P_k) = S(f)$$

e analogalmente, $\int_{[a,b]} L(x)\, dx = s(f)$.
Per definizione, abbiamo che $f(x)$ risulta integrabile secondo Riemann se e solo se $s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)\, dx$, ovvero se e solo se

$$\int_{[a,b]} U(x) = \int_{[a,b]} L(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

e dunque $\int_{[a,b]} U(x) - L(x)\, dx = 0$. Poichè $U(x) \ge L(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, ciò sarà verificato se e solo se $U(x) = L(x)$ per q.o. $x \in [a,b]$. Essendo infine $L(x) \le f(x) \le U(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, otteniamo che

$$L(x) = f(x) = U(x) \text{ per q.o. } x \in [a,b]$$

e dunque che $f(x)$ è misurabile in $[a,b]$ con

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} U(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

□

Ne segue inoltre

TEOREMA 5.10. (DI VITALI-LEBESGUE)
Sia $f(x)$ funzione limitata nell'intervallo $[a,b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se e solo se $f(x)$ è q.o. continua in $[a,b]$.

Dim. È sufficiente osservare nella precedente dimostrazione che $f(x)$ risulta integrabile secondo Riemann se e solo se $U(x) = L(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$ e che tale condizione è verificata se e solo se $f(x)$ risulta q.o. continua in $[a, b]$. Infatti, se $x \notin P_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora $U(x) = L(x)$ se e solo se $f(x)$ risulta continua in x. Essendo $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$ un insieme numerabile, segue la tesi. □

Il classico esempio di funzione limitata non integrabile secondo Riemann ma integrabile secondo Lebesgue è la funzione di Dirichlet in $[0, 1]$, osserviamo difatti che tale funzione non è continua in ogni $x \in [0, 1]$.

Riguardo all'integrale improprio di Riemann, abbiamo la seguente relazione con l'integrale di Lebesgue. Abbiamo che se $|f(x)|$ risulta integrabile in senso improprio in $(a, b]$ allora $f(x)$ risulta integrabile secondo Lebesgue in $(a, b]$ e vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{(a,b]} f(x)\,dx$$

Si ha invece che la funzione non risulta integrabile secondo Lebesgue in $(a, b]$ se l'integrale improprio $\int_a^b |f(x)|\,dx$ risulta divergente anche se $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. Infatti ricordiamo che $f(x)$ risulta integrabile secondo Lebesgue se e solo se risulta tale $|f(x)|$. Un esempio è dato dall'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ che risulta convergente ma non assolutamente convergente, la funzione $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ non risulta quindi integrabile secondo Lebesgue in $(0, 1]$.

Analogalmente, nel caso di funzione integrabile in senso improprio in un intervallo illimitato, abbiamo che $f(x)$ risulta integrabile secondo Lebesgue in $[a, +\infty)$ se l'integrale improprio risulta assolutamente convergente ed in tal caso vale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{[a,+\infty)} f(x)\,dx$$

Ad esempio è l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ risulta convergente ma non assolutamente convergente. Dunque la funzione $\frac{\sin x}{x}$ non risulta integrabile secondo Lebesgue in $[1, +\infty)$ pur essendo integrabile in senso improprio.

Infine, vediamo come si estende il Teorema fondamentale del calcolo integrale nella teoria dell'integrale di Lebesgue. Sia $f(x)$ funzione integrabile secondo Lebesgue in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e sia

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]$$

allora $F(x)$ risulta q.o. derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ per q.o. $x \in (a, b)$. Viceversa, se $F(x)$ è derivabile in $[a, b]$ (non solo q.o.) e $F'(x)$ è integrabile secondo Lebesgue in $[a, b]$ allora

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)\,dt.$$

5. Principali Teoremi sull'integrale di Lebesgue

Iniziamo con il riportare i principali risultati riguardanti il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ricordiamo che per quanto riguarda l'integrale di Riemann abbiamo che *se* $(f_n(x))_{n\in N}$ *è una successione di funzioni continue in* $[a,b]$ *a valori complessi, uniformemente convergente ad* $f(x)$ *in* $[a,b]$*, allora*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

L'integrale di Lebesgue permette di generalizzare il precedente risultato considerando condizioni di convergenza più deboli. Abbiamo difatti

Teorema 5.11. (di B. Levi di convergenza monotona)
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni reali misurabili sull'insieme misurabile* $E \subset \mathbb{R}^n$ *tale che* $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ *per q.o.* $x \in E$ *e ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Se per* $n \to +\infty$*,* $f_n(x) \to f(x)$ *per q.o.* $x \in E$*, allora*

$$\int_E f_n(x)\,dx \to \int_E f_n(x)\,dx \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

Ne segue in particolare

Corollario 5.1. (Integrazione termine a termine)
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni reali misurabili e non negative sull'insieme misurabile* $E \subset \mathbb{R}^n$*. Se*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in E,$$

allora

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_E f(x)\,dx$$

Vale inoltre

Teorema 5.12. (di H. Lebesgue sulla convergenza dominata)
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili sull'insieme misurabile* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e sia* φ *funzione sommabile in* E *tale che* $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ *per q.o.* $x \in E$*. Se per* $n \to +\infty$*,* $f_n(x) \to f(x)$ *per q.o.* $x \in E$*, allora* f *risulta sommabile in* E *e*

$$\int_E f_n(x)\,dx \to \int_E f(x)\,dx, \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

Il prossimo risultato estende all'integrale di Lebesgue le note formule di riduzione per l'integrale multiplo di Riemann. Dato un sottoinsieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, poniamo

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, (x,y) \in E\},\ x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{e} \quad E_y = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (x,y) \in E\},\ y \in \mathbb{R}^m,$$

ed osserviamo che tali insiemi risultano misurabili rispettivamente in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Nel seguito, una funzione f misurabile in $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ la penseremo

definita in tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ponendo $f(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \notin E$. Vale allora

TEOREMA 5.13. (DI FUBINI-TONELLI)
Sia $f \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{C})$ essendo $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ insieme misurabile. Allora risulta $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1(E_y,\mathbb{C})$ e $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(E_x,\mathbb{C})$ e vale

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{E_y} f(x,y)\,dx)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{E_x} f(x,y)\,dy)\,dx. \tag{23}$$

Osserviamo che dall'esistenza degli integrali

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\int_{E_y} f(x,y)\,dx)\,dy \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{E_x} f(x,y)\,dy)\,dx$$

non si può dedurre la sommabilità di $f(x,y)$ in E ne' l'identità (23). Abbiamo invece che, *se esiste almeno uno degli integrali*

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\int_{E_y} |f(x,y)|\,dx)\,dy \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{E_x} |f(x,y)|\,dy)\,dx$$

allora $f(x,y)$ risulta sommabile in E e vale (23).

Infine, consideriamo una funzione $f(t,x)$ dipendente dal parametro $t \in A \subset \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e misurabile rispetto ad $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ con E misurabile. Per ogni $t \in A$ risulta definita la funzione

$$F(t) := \int_E f(t,x)\,dx.$$

e dal Teorema di convergenza dominata si ottengono le seguenti proprietà di continuità e derivabilità

TEOREMA 5.14. (PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DIPENDENTE DA UN PARAMETRO)
Sia $f(t,x)$ definita in un sottoinsieme $A \times E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ con E misurabile. Se la funzione $f(\cdot,x)$ è continua in A per q.o. $x \in E$, la funzione $f(t,\cdot)$ è sommabile in E per ogni $t \in A$ ed esiste $g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R})$ tale che

$$|f(t,x)| \le g(x) \quad \textit{per ogni } t \in A \textit{ e q.o. } x \in E$$

allora $F(t) = \displaystyle\int_E f(t,x)\,dx$ risulta continua in A.
Se inoltre la funzione $f(\cdot,x)$ è derivabile in A per q.o. $x \in E$ ed esiste $h \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R})$ tale che

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \le h(x) \quad \textit{per ogni } t \in A \textit{ e q.o. } x \in E$$

allora $F(t) = \displaystyle\int_E f(t,x)\,dx$ risulta derivabile in A e $F'(t) = \displaystyle\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$.

DIM. Proviamo innanzitutto che la funzione risulta continua in A. Preso comunque $t_0 \in A$ e una successione $t_n \to t_0$ per $n \to +\infty$, è sufficiente provare che $F(t_n) \to F(t_0)$ per $n \to +\infty$. A tale scopo, posto $f_n(x) := f(t_n,x)$ per ogni $x \in E$, osserviamo che per ipotesi $f_n \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{C})$ e $|f_n(x)| \le g(x)$ per q.o. $x \in E$ e ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, essendo

$f(\cdot, x)$ continua in A per q.o. $x \in E$, abbiamo che $f_n(x) = f(t_n, x) \to f(t_0, x) := f_0(x)$ per q.o. $x \in E$. Dal Teorema di convergenza dominata otteniamo allora che

$$F(t_n) = \int_E f_n(x)\, dx \to \int_E f_0(x)\, dx = F(t_0), \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Analogalmente, per provare che $F(t)$ risulta derivabile in ogni $t_0 \in A$ con $F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx$, proviamo che per ogni successione $t_n \to t_0$ per $n \to +\infty$, risulta

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} \to \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Osserviamo allora che

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_E \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0}\, dx$$

e che la successione di funzioni $h_n(x) = \frac{f(t_n,x) - f(t_0,x)}{t_n - t_0}$ verifica le ipotesi del Teorema di convergenza dominata essendo

$$h_n(x) = \frac{f(t_n, x) - f(t_0, x)}{t_n - t_0} \to \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \text{ per } n \to +\infty \text{ e q.o. } x \in E$$

e, per il Teorema di Lagrange, $|h_n(x)| \leq h(x)$ per q.o. $x \in E$ e ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue allora che per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_E h_n(x)\, dx \to \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx$$

$\square$

CAPITOLO 6

Proiezioni Ortogonali e Serie di Fourier

1. Spazi vettoriali normati e Spazi di Banach

Ricordiamo che uno spazio vettoriale reale (o complesso) è un insieme non vuoto V in cui siano definite le operazioni di somma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, e di prodotto per uno scalare $\lambda\mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{u} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) soddisfacenti alle proprietà

- *commutativa*: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,
- *associativa*: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,
- *esistenza dell'elemento neutro*: esiste $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ tale che $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$,
- *esistenza dell'opposto*: per ogni $\mathbf{u} \in V$ esiste $\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{u}+\mathbf{v} = 0$,
- $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$),
- $(\lambda+\nu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}+\nu\mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$ e $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$),
- $\lambda(\nu\mathbf{u}) = (\lambda\nu)\mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$ e $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$),
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$.

Sono esempi di spazi vettoriali reali gli insiemi $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali con le operazioni

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n) \quad \text{e} \quad \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Altro esempio di spazio vettoriale complesso è l'insieme $\mathbb{C}([a,b], \mathbb{C})$, delle funzioni continue su un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a valori complessi munito delle operazioni di somma $f+g$ e di prodotto per uno scalare λf, $\lambda \in \mathbb{C}$, definite come segue

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{e} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

per ogni $x \in [a,b]$.

Dato uno spazio vettoriale reale (o complesso) V, diciamo che un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V se $\mathbf{0} \in W$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) risulta $\lambda\mathbf{u} \in W$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$. In particolare, dati k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in V$, si dice sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in V$ il sottospazio

$$span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k] := \{\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+...+\lambda_k\mathbf{v}_k \,|\, \lambda_i \in \mathbb{R}\,(\text{risp. } \mathbb{C}),\ i = 1, 2, ..., k\}$$

Ricordiamo inoltre che k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in V$ sono detti linearmente indipendenti se l'uguaglianza

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

è verificata solo per $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. In caso contrario i vettori sono detti linearmenti dipendenti.

Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in V$ linearmente indipendenti, diciamo che questi costituiscono una base del sottospazio $W = span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k]$. Dalla definizione segue allora che per ogni $\mathbf{v} \in W$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

e che (essendo i vettori linearmente indipendenti) tale rappresentazione è univocamente determinata.

Si può inoltre verificare che *due diverse basi di un sottospazio vettoriale sono necessariamente costituite dallo stesso numero di vettori.* Tale numero è detto dimensione del sottospazio W.

In particolare, se lo spazio vettoriale V risulta generato dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$ diremo che V è spazio vettoriale di dimensione n e scriveremo $\mathsf{dim}(V) = n$.

Ad esempio, $\mathbb{R}^n$ è spazio vettoriale di dimensione n essendo

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0),\ ...,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

una sua base (*base canonica*).

Nello spazio $\mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$, risultano linearmente indipendenti le funzioni $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$,..., $f_n(x) = x^n$, il sottospazio W da queste generato è l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n e risulta $\mathsf{dim}(W) = n + 1$.

Dato uno spazio vettoriale reale o complesso V, si dice norma un'applicazione $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ da V in $\mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà

- $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$;
- se $\|\mathbf{v}\| = 0$ allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)
- *Diseguaglianza triangolare*: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Uno spazio vettoriale dotato di una norma viene detto spazio vettoriale normato.

Osserviamo che una norma in uno spazio vettoriale normato V determina una distanza, e dunque una metrica, ponendo

$$\mathsf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

A partire da tale metrica si deduce una topologia in V: si definisce intorno sferico di raggio $r > 0$ del vettore $\mathbf{v}_0 \in V$ l'insieme

$$\mathcal{B}_r(\mathbf{v}_0) := \{\mathbf{v} \in V \mid d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0) = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < r\}.$$

Diremo quindi che un sottoinsieme $A \subset V$ è aperto se per ogni $\mathbf{v}_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(\mathbf{v}_0) \subset A$.

Inoltre, a partire da tale metrica possiamo definire il concetto di successione convergente nello spazio vettoriale normato V: si dice che una successione di vettori $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ converge a $\mathbf{v}_0$ in V, e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_0 \text{ in } V,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ risulta $\mathbf{v}_n \in B_\varepsilon(\mathbf{v}_0)$, ovvero se risulta

$$\mathsf{d}(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_0) = \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0\| \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Ad esempio, lo spazio $\mathbb{R}^n$ è spazio vettoriale normato munito della *norma euclidea*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}$$

essendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) in \mathbb{R}^n$. La distanza indotta da tale norma è l'usuale *distanza euclidea*:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

e un intorno sferico di raggio $r > 0$ di $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ corrisponde alla palla n-dimensionale di raggio $r > 0$ e centro $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2 < r^2\}$$

Osserviamo che in $\mathbb{R}^n$ risultano norme anche le applicazioni

$$\|\mathbf{x}\|_0 := \sum_{k=1}^{n} |x_i| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{k=1,2,...,n} |x_k|.$$

Si può verificare che tali norme risultano tra loro *equivalenti*, nel senso che vale

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_0 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Altro esempio di spazio vettoriale normato è lo spazio $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ munito della norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Osserviamo che una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ converge ad f in $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$, se $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente in $[a,b]$.

Infine, dato uno spazio vettoriale normato V, una successione $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V si dice successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m > \nu$ risulta $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\| < \varepsilon$.

È immediato verificare che *ogni successione convergente in V risulta successione di Cauchy*. Non è vero in generale il viceversa. Uno spazio vettoriale normato (o più in generale uno spazio metrico) in cui ogni successione

di Cauchy risulta convergente viene detto completo. Uno spazio vettoriale normato completo viene anche detto spazio di Banach.

Si può provare che *ogni spazio vettoriale normato di dimensione finita è uno spazio di Banach.* In particolare, $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ è spazio di Banach. Altro esempio di spazio di Banach è lo spazio $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ sopra definita. Non risulta invece spazio di Banach lo spazio $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ con la norma integrale

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2. Spazi vettoriali con prodotto scalare e spazi di Hilbert

Sia V uno spazio vettoriale complesso, un'applicazione $a : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice prodotto scalare su V se verifica le seguenti proprietà:

(i) $a(\lambda\mathbf{u},\mathbf{v}) = \lambda a(\mathbf{u},\mathbf{v})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$,
(ii) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + a(\mathbf{v},\mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$,
(iii) $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{a(\mathbf{v},\mathbf{u})}$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ (dove $\overline{z}$ denota il coniugato di $z \in \mathbb{C}$),
(iv) se $a(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$ allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,
(v) $a(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{u} \in V$ (osserviamo che essendo $a(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \overline{a(\mathbf{u},\mathbf{u})}$ risulta $a(\mathbf{u},\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$).

Nel caso di spazio vettoriale reale, un prodotto scalare è un'applicazione $a : V \times V \to \mathbb{R}$ soddisfacente alle proprietà sopra elencate dove considereremo $\lambda \in \mathbb{R}$ e la condizione (iii) sostituita con la condizione di simmetria

(iii)' $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a(\mathbf{v},\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

Nel seguito, per il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$, useremo la seguente notazione

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle := a(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

sono spesso utilizzati anche i simboli $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ o $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

Negli spazi $\mathbb{R}^n$ risulta prodotto scalare (*prodotto scalare canonico*) l'applicazione

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Altro esempio è dato dallo spazio $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ dove risulta prodotto scalare l'applicazione

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{24}$$

In uno spazio vettoriale V con prodotto scalare è possibile definire una norma (detta norma indotta dal prodotto scalare) ponendo

$$\|\mathbf{v}\| := \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{v} \in V$$

Difatti, dalla definizione di prodotto scalare risulta immediatamente che $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e che $\|\mathbf{v}\| = 0$ solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Inoltre $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$. Per provare la diseguaglianza triangolare, osserviamo innanzitutto che vale la seguente *diseguaglianza di Schwarz* [1]

$$\text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ risulta } |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Si ottiene allora che

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

da cui $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Abbiamo dunque che uno spazio vettoriale con prodotto scalare è uno spazio normato, se tale spazio risulta completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare diremo che è uno spazio di Hilbert (spazio euclideo nel caso in cui risulti di dimensione finita).

Ad esempio in $\mathbb{R}^n$ la norma indotta dal prodotto scalare canonico è la norma euclidea

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e risulta spazio euclideo. In $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ la norma indotta dal prodotto scalare (24) risulta essere

$$\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}},$$

con tale norma $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ non è completo e dunque non risulta spazio di Hilbert.

3. Gli spazi $\mathcal{L}^p$

Dato un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$, per ogni $p \in [1, +\infty)$ poniamo

$$\mathcal{L}^p(E; \mathbb{C}) = \{f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ misurabile} \,|\, \int_E |f(x)|^p \, dx < +\infty\}$$

Si definisce inoltre

$$\mathcal{L}^\infty(E; \mathbb{C}) = \{f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ misurabile} \,|\, \exists M > 0, \, |f(x)| \leq M \text{ per q.o. } x \in E\}.$$

[1] Per provare tale diseguaglianza osserviamo che risulta banale se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ altrimenti, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ risulta

$$0 \leq \|\mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}\|^2 = \|u\|^2 - \bar{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + |\lambda|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

e scelto $\lambda = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|v\|^2}$ se ne deduce che

$$0 \leq \|u\|^2 - |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2\|v\|^2.$$

In tali spazi penseremo identificate funzioni q.o. uguali in E.
Tali spazi risultano spazi vettoriali normati muniti rispettivamente della norma

$$\|f\|_p := (\int_E |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 \,|\, |f(x)| \leq M \text{ per q.o. } x \in E\}$$

ovvero, per ogni $p \in [1, +\infty]$ valgono le seguenti proprietà

- $\|f\|_p \geq 0$ per ogni $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{C})$;
- se $\|f\|_p = 0$ allora $f = 0$ in $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{C})$ (ovvero $f(x) = 0$ per q.o. $x \in E$);
- per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e ogni $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{C})$ risulta $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$;
- *Diseguaglianza triangolare o di Minkowski*: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ per ogni $f, g \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{C})$.

Caso particolare è lo spazio $\mathcal{L}^2(E, \mathbb{C})$, difatti la sua norma risulta indotta dal prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_E f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

Tale prodotto risulta ben definito in quanto dalla diseguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ segue che

$$|f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}$$

da cui, se $f, g \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{C})$, si ottiene che $f\overline{g} \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{C})$ e vale $\|f\overline{g}\|_1 \leq \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$.

Si può inoltre dimostrare che *ogni spazio $\mathcal{L}^p$ è completo* , dunque spazio di Banach ed in particolare $\mathcal{L}^2$ risulta spazio di Hilbert.

In $\mathcal{L}^2(E, \mathbb{C})$ vale inoltre la *diseguaglianza di Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{C})$$

ovvero vale

$$|\int_E f(x)\overline{g(x)} \, dx| \leq (\int_E |f(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} (\int_E |g(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(E, \mathbb{C}).$$

Il seguente risultato generalizza la precedente diseguaglianza agli spazi $\mathcal{L}^p(E, \mathbb{C})$.
A tale scopo, per ogni $p \in [1, +\infty]$ definiamo coniugato di p il valore $p^* \in [1, +\infty]$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, con la convenzione che se $p = 1$ allora $p^* = \infty$ e viceversa. Vale allora

Teorema 6.1. (Diseguaglianza di Hölder)
Per ogni $p \in [1, +\infty]$, se $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathbb{C})$ e $g \in \mathcal{L}^{p^*}(E, \mathbb{C})$ allora $fg \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{C})$ e vale

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$$

Osserviamo che dal precedente risultato segue che se $\mu(E) < +\infty$ allora $\mathcal{L}^q(E;\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^p(E;\mathbb{C})$ per ogni $1 < p < q < +\infty$ infatti, osservato che $(\frac{p}{q})^* = \frac{q}{q-p}$ si ha

$$\int_E |f(x)|^p\,dx \leq (\int_E |f(x)|^q)^{\frac{p}{q}}(\int_E dx)^{\frac{q-p}{q}}$$

da cui

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(E)^{\frac{q-p}{pq}}$$

mentre per ogni $1 \leq p < +\infty$ risulta $\mathcal{L}^\infty(E;\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^p(E;\mathbb{C})$ essendo

$$\|f\|_p = (\int_E |f(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty \mu(E)^{\frac{1}{p}}$$

Infine, vale il seguente risultato di densità

TEOREMA 6.2. (DI DENSITÀ)
Per ogni $p \in [1,+\infty)$, lo spazio $\mathcal{C}^1(E;\mathbb{C})$ è denso in $\mathcal{L}^p(E;\mathbb{C})$, ovvero, per ogni $f \in L^p(E;\mathbb{C})$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{C})$ tale che $\|f-g\|_p < \varepsilon$.

4. Vettori ortogonali e proiezioni ortogonali

In uno spazio vettoriale (reale o complesso) V munito di prodotto scalare diciamo che due vettori non nulli $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ sono ortogonali se risulta $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$.

Osserviamo che se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori ortogonali allora vale l'*identità di Pitagora*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Ne segue in particolare che *se $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ sono ortogonali, ovvero $\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = 0$ per ogni $i \neq j$, allora*

$$\|\sum_{k=1}^n v_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2$$

e $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ risultano linearmente indipendenti.

Diremo in tal caso che i vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ costituiscono una base ortogonale del sottospazio $W = span[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n]$. Se inoltre $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ per ogni $i = 1,2,...,n$, diremo che i vettori $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ sono ortonormali e costituiscono una base ortonormale di W. Osserviamo che se $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ sono ortonormali allora

$$\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ad esempio, i vettori $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Nello spazio $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ munito del prodotto scalare integrale

$$\langle f,g\rangle = \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

la famiglia di funzioni e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, risulta ortogonale. Infatti risulta

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_{[-\pi,\pi]} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 2\pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

Otterremo allora una famiglia ortonormale considerando le funzioni $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Osserviamo che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ sono vettori ortonormali e $W = span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$ allora ogni $\mathbf{w} \in W$ verrà rappresentato come

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k$$

Infatti, se $\mathbf{w} \in W$, dalla definizione esistono $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ tali che $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{v}_k$. Poichè $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ sono ortonormali otteniamo, dalle proprietà del prodotto scalare, che per ogni $j = 1, 2, ..., n$ risulta

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j$$

Ne segue in particolare che per ogni $\mathbf{w} \in W = span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n]$ vale

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_k \rangle|^2 \tag{25}$$

Vale inoltre il seguente risultato

Teorema 6.3. (metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) *Sia V spazio vettoriale con prodotto scalare e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, n vettori linearmente indipendenti di V. Allora esistono n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ ortonormali tali che*

$$span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = span[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n].$$

Dim. Per induzione su $n \in \mathbb{N}$, se $n = 1$ sarà sufficiente considerare $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$. Supponiamo ora vera l'affermazione per $n - 1$, abbiamo allora che esistono $n - 1$ vettori ortonormali, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{n-1}$ tali che

$$span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{n-1}] = span[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{n-1}].$$

Il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$ risulta ortogonale a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{n-1}$ e posto $\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$, avremo che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\mathbf{u}_n$ risultano ortonormali e

$$span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = span[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n].$$

□

Dato uno spazio vettoriale con prodotto scalare V siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, n vettori ortonormali in V. Denotato con $W = span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$, per ogni $\mathbf{u} \in V$ chiameremo proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ su W il vettore

$$P_W(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k \in W.$$

Vale difatti la seguente caratterizzazione

TEOREMA 6.4. (SULLE PROIEZIONI ORTOGONALI)
Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, n vettori ortonormali in V e $W = span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$. Allora $P_W(\mathbf{u})$ risulta l'unico elemento di W soddisfacente alle proprietà

(i) $P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}$ *risulta ortogonale ad ogni elemento di W:*

$$\langle P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in W,$$

(ii) $\|\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})\| = \min\{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v} \in W\}$.

Vale inoltre la relazione

$$\|\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|P_W(\mathbf{u})\|^2 \tag{26}$$

da cui, in particolare

$$\|P_W(\mathbf{u})\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \tag{27}$$

DIM. Proviamo innanzitutto che $P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}$ risulta ortogonale ad ogni elemento di W. Infatti per ogni $j = 1, 2, ..., n$ risulta

$$\langle P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}, \mathbf{v}_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k\rangle \mathbf{v}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v}_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k\rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j\rangle = 0$$

Se $\mathbf{v} \in W$ abbiamo che $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j\rangle \mathbf{v}_j$ e dunque, per quanto sopra $\langle P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. Viceversa, proviamo che se $\bar{\mathbf{u}} \in W$ è tale che $\langle \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in W$ allora $\bar{\mathbf{u}} = P_W(\mathbf{u})$. Infatti poichè $\bar{\mathbf{u}} \in W = span[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$ abbiamo che $\bar{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_k\rangle \mathbf{v}_k$. Inoltre per ipotesi, per ogni $k = 1, 2, ..n$ abbiamo che $\langle \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \mathbf{v}_k\rangle = 0$ e dunque $\langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_k\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k\rangle$ da cui $\bar{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k\rangle \mathbf{v}_k = P_W(\mathbf{u})$.
Proviamo ora che $P_W(\mathbf{u})$ verifica (ii) e che risulta l'unico elemento di W avente distanza minima da $\mathbf{u}$. Infatti, per (i), abbiamo che, per ogni $\mathbf{v} \in W$, i vettori $\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})$ e $P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{v}$ risultano ortogonali. Dall'identità di Pitagora risulta allora

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})\|^2 + \|P_W(\mathbf{u}) - \mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})\|^2$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\mathbf{v} = P_W(\mathbf{u})$.
Infine, osserviamo che da (i), essendo $\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})$ ortogonale a $P_W(\mathbf{u})$, dall'identità di Pitagora si ha che $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - P_W(\mathbf{u})\|^2 + \|P_W(\mathbf{u})\|^2$ e dunque vale (26). Inoltre, essendo i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ ortonormali, dalla definizione di $P_W(\mathbf{u})$ e da (25) otteniamo

$$\|P_W(\mathbf{u})\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle|^2$$

Da (26) segue allora (27). □

Ad esempio in $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, con prodotto scalare integrale, consideriamo la famiglia linearmente indipendente delle potenze $p_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Le combinazioni lineari di tali potenze forniranno l'insieme di tutti in polinomi in $[-1, 1]$. Ortonormalizzando tale famiglia otteniamo il sistema ortonormale $P_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}^*$ dove

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}), ...$$

Tali polinomi sono detti polinomi di Legendre e si può provare che

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Data una funzione $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio W_n generato dai polinomi $P_i(x)$ con $i = 0, 1, ..., n$ sarà allora

$$P_{W_n}(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(x) \quad \text{dove} \quad \lambda_i = \langle f(x), P_i(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)P_i(x)\,dx.$$

e per quanto provato nel Teorema sulle proiezioni ortogonali, abbiamo che $P_{W_n}(f)$ è la migliore approssimazione (nella norma indotta dal prodotto scalare integrale) della funzione f mediante polinomi di grado minore o uguale ad n:

$$\|f - P_{W_n}(f)\|_2 = \min\{\|f-p\|_2 \,|\, p \in W_n\}.$$

ed inoltre risulta

$$\sum_{i=0}^{n} |\langle f(x), P_i(x)\rangle|^2 \leq \|f\|_2$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5. Serie di Fourier in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$

Come esempio notevole di applicazione del Teorema delle proiezioni, consideriamo nello spazio $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ il sottospazio $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, generato dalle funzioni $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ con $k = -n, ..., n$: avremo che il generico elemento di $\mathcal{P}_n$ sarà rappresentato da

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{ikx}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C},\ i = -n, ..., n.$$

Gli elementi di tale spazio vengono detti polinomi trigonometrici di ordine n. Data una generica funzione $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ la proiezione ortogonale di f su $\mathcal{P}_n$ sarà allora

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f(x), \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\rangle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\langle f(x), e^{ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

è detto k-esimo coefficiente di Fourier di $f(x)$. Dal Teorema sulle proiezioni ortogonali risulta che il polinomio f_n è la migliore approssimazione, in norma $\|\cdot\|_2$, della funzione f mediante polinomi trigonometrici di ordine n:

$$\|f - f_n\|_2 = \min\{\|f - p_n\|_2 \,|\, p_n \in \mathcal{P}_n\}. \tag{28}$$

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio di Fourier $f_n(x)$ risulta essere la ridotta n-esima della serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad \text{dove} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\,dx, \tag{29}$$

detta serie di Fourier di $f(x)$. Ci si pone quindi il problema di sapere se, e in che senso, la successione dei polinomi di Fourier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla funzione f, ovvero se ed in che senso risulta valida la rappresentazione

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}. \tag{30}$$

• Convergenza puntuale e uniforme

Vediamo innanzitutto alcuni risultati riguardanti la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier. A tale scopo osserviamo che data $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, essendo per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $|e^{ikx}| = 1$, risultano ben definiti i coefficienti di Fourier

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

e dunque i polinomi di Fourier

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Data allora $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, risulta

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{[-\pi,\pi]} f(t)e^{-ikt}\,dt\Big)\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}\,dt \end{aligned}$$

Si può verificare inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{R}$ vale

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}z)}{\sin\frac{z}{2}}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} &= e^{-inz}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)z} = e^{-int}(1 + e^{iz} + e^{2iz} + ... + e^{i2nz}) \\ &= e^{-inz}\frac{1-e^{i(2n+1)z}}{1-e^{iz}} = \frac{e^{-inz} - e^{i(n+1)z}}{1-e^{iz}}\,\frac{e^{-i\frac{z}{2}}}{e^{-i\frac{z}{2}}} \\ &= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})z} - e^{i(n+\frac{1}{2})z}}{e^{-i\frac{z}{2}} - e^{i\frac{z}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{\sin\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Pensando $f(x)$ estesa per periodicità su tutto $\mathbb{R}$ ed operando la sostituzione $z = t - x$, essendo l'integrale invariante per traslazione, si ottiene

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x+z)\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}z)}{\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

La funzione

$$D_n(z) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}z)}{\sin\frac{z}{2}}$$

è detta nucleo di Dirichlet ed è immediato verificare che

$$\int_{[-\pi,\pi]} D_n(z)\,dz = 2\pi$$

Si ottiene allora che

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} (f(x+z) - f(x))\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}z)}{\sin\frac{z}{2}}\,dz \tag{31}$$

Abbiamo quindi che la convergenza della successione dei polinomi di Fourier $f_n(x)$ ad $f(x)$ seguirà dalla convergenza a zero dell'integrale (31). Al riguardo vale il seguente risultato

Lemma 6.1. (di Riemann-Lebesgue)
Se $g \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$ allora

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[a,b]} g(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0 \quad e \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[a,b]} g(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0.$$

Dim. Supponiamo innanzitutto $g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$, allora, integrando per parti otteniamo

$$\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,dx = g(a)\frac{\cos\lambda a}{\lambda} - g(b)\frac{\cos\lambda b}{\lambda} + \int_a^b g'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\,dx \to 0 \quad \text{per} \quad \lambda\to+\infty$$

Ricordando che $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ è denso in $\mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$, per ogni $g \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ tale che $\|g - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Da quanto sopra provato, abbiamo allora che esiste $M > 0$ tale che $|\int_{[a,b]} g_\varepsilon(x)\sin(\lambda x)\,dx| \le \varepsilon$ per ogni $\lambda > M$ e dunque, per $\lambda > M$ concludiamo

$$\begin{aligned}|\int_{[a,b]} g(x)\sin(\lambda x)\,dx| &\le |\int_{[a,b]} (g(x) - g_\varepsilon(x))\sin(\lambda x)\,dx| + |\int_{[a,b]} g_\varepsilon(x)\sin(\lambda x)\,dx| \\ &\le \|g - g_\varepsilon\|_1 + |\int_{[a,b]} g_\varepsilon(x)\sin(\lambda x)\,dx| \le 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Allo stesso modo si procede per $\int_a^b g(x)\cos(\lambda x)\,dx$. □

Siamo ora in grado di provare il seguente risultato

Teorema 6.5. (convergenza puntuale)
Se $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e per $x \in (-\pi,\pi)$ esistono $\delta > 0$ e $M > 0$ tali che

$$|f(x+z) - f(x)| \leq M|z|, \quad \forall z \in (-\delta,\delta) \tag{32}$$

allora $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to +\infty$, ovvero la serie di Fourier (29) converge ad $f(x)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = f(x).$$

Dim. Da (31) abbiamo che

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} (f(x+z) - f(x)) \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}z)}{\sin\frac{z}{2}}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{f(x+z)-f(x)}{\sin\frac{z}{2}} \sin(\frac{2n+1}{2}z)\, dz \end{aligned}$$

Posto

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(x+z)-f(x)}{\sin\frac{z}{2}} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

dalla condizione (32), abbiamo che $g(z)$ risulta limitata in $(-\delta,\delta)$ ed essendo $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ otteniamo che $g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Allora, poichè

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} g(z)\sin(\frac{2n+1}{2}z)\, dz,$$

dal Lemma di Riemann-Lebesgue, segue la tesi. □

Osserviamo che l'ipotesi (32) può essere indebolita richiedendo che esista $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x+z)-f(x)}{z} \in \mathcal{L}^1([-\delta,\delta],\mathbb{C})$$

tale condizione viene detta condizione di Dini.

In modo analogo a quanto provato nel precedente teorema si può provare che se $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e per $x \in (-\pi,\pi)$ esistono $\delta > 0$ e $M > 0$ tali che

$$|f(x \pm z) - f(x^{\pm})| \leq M|z|, \quad \forall z \in (-\delta,\delta) \tag{33}$$

dove $f(x^{\pm}) = \lim_{t\to x^{\pm}} f(t)$, allora

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

Osserviamo inoltre che l'ipotesi di continuità non è sufficiente per provare la convergenza puntuale della serie di Fourier [2] avremo invece che la condizione (32) risulta verificata in x se la funzione risulta continua ed ammette derivate destra e sinistra finite in x (punti angolosi).

Si può in effetti provare che se $f \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (o anche solo continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti) la serie di Fourier converge uniformemente, essendo in tal caso

[2] Si può provare che se f è funzione continua allora la successione dei polinomi di Fejer, ottenuti come media aritmetica dei polinomi di Fourier di f, risulta uniformemente convergente ad f.

la condizione (32) verificata uniformemente in ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Abbiamo difatti il seguente risultato

TEOREMA 6.6. (CONVERGENZA UNIFORME)
Se $f \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, allora $f_n \to f$ uniformemente in $[-\pi, \pi]$, ovvero la serie di Fourier (29) converge uniformemente ad f in $[-\pi, \pi]$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = f(x), \qquad \textit{uniformemente in } [-\pi, \pi].$$

• CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

Proviamo ora, senza ipotesi supplementari, che data $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, la corrispondente serie di Fourier converge a f in $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{in } \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}), \tag{34}$$

ovvero, che la successione dei polinomi di Fourier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alla funzione f in $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Si dirà in questo caso che la serie di Fourier converge in media quadratica.

Ricordiamo innanzitutto che dal Teorema sulle proiezioni ortogonali valgono le seguenti proprietà. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, dall'identità di Pitagora, risulta

$$\frac{1}{2\pi} \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad \text{e} \quad \|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 \tag{35}$$

da cui

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2.$$

e quindi, passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene la *diseguaglianza di Bessel*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2. \tag{36}$$

Proviamo allora che la serie di Fourier converge in media quadratica

TEOREMA 6.7. (CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA)
Se $f \in \mathcal{L}^2[-\pi, \pi], \mathbb{C})$ allora $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, ovvero la serie di Fourier (29) converge in media quadratica ad f:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \textit{in} \quad \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}).$$

Vale inoltre l'identità di Parseval

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2.$$

Dim. Proviamo innanzitutto che se $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^2(E,\mathbb{C})$ allora vale l'identità di Parseval (e viceversa). A tale scopo osserviamo che da (35), si ha

$$\|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f_n\|_2^2$$

e dunque avremo che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$$

Poichè inoltre risulta

$$\|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\rangle|^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

avremo che $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$ se e solo se vale l'uguaglianza

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

Dimostriamo ora che la serie di Fourier converge in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Per ogni $\varepsilon > 0$, essendo $\mathcal{C}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ denso in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, sia $g \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ tale che $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Detto g_n il polinomio di Fourier di ordine n relativo a g, dal Teorema di convergenza uniforme della serie di Fourier abbiamo che per n sufficientemente grande risulta $\|g - g_n\|_\infty < \varepsilon$. Per n sufficientemente grande, dalla proprietà del polinomio di Fourier abbiamo allora

$$\|f - f_n\|_2 \le \|f - g_n\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - g_n\|_2 < \|f - g\|_2 + \sqrt{2\pi}\|g - g_n\|_\infty < \varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

e dunque che $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. □

Dal precedente risultato segue immediatamente che se $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ è tale che $\langle f(x), e^{ikx}\rangle = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ allora $f = 0$ in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ ovvero $f(x) = 0$ per q.o. $x \in [-\pi,\pi]$. Ne segue dunque che la famiglia ortonormale $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ è massimale in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ nel senso che non esistono elementi non nulli ortogonali ad ogni elemento di tale famiglia:

Corollario 6.1. *Se $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ è tale che $\langle f(x), e^{ikx}\rangle = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ allora $f(x) = 0$ per q.o. $x \in [-\pi,\pi]$.*

Il prossimo risultato prova come, viceversa, a partire da una successione $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ sia possibile risalire ad una funzione f avente come coefficienti di Fourier la successione data:

Teorema 6.8. (di Riesz-Fischer)
Per ogni successione $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tale che

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty,$$

esiste $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ tale che $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\,dx$.

Dim. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$p_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Avremo allora che $p_n \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],|C)$ e dall'identità di Pitagora per ogni $m > n$ in $\mathbb{N}$ risulta

$$\|p_m - p_n\|_2^2 = \|\sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikx}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2$$

Poichè la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$ converge, avremo che la successione delle sue ridotte è successione di Cauchy. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \varepsilon 2\pi$ per ogni $m > n \geq \nu$. Ne segue che per ogni $m > n \geq \nu$ risulta

$$\|p_m - p_n\|_2^2 < \varepsilon$$

e dunque che la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è successione di Cauchy in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Essendo $\mathcal{L}^2$ spazio completo, avremo che esiste $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ tale che $\|p_n - f\|_2 \to 0$. Dalla diseguaglianza di Schwarz si ottiene allora che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ risulta

$$|\langle p_n(x) - f(x), e^{ikx}\rangle| \leq \sqrt{2\pi}\|p_n - f\|_2 \to 0 \quad n \to +\infty$$

e dunque che

$$\langle f(x), e^{ikx}\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n(x), e^{ikx}\rangle = c_k.$$

□

Consideriamo lo spazio

$$\ell_2 := \{(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty\}$$

con la norma

$$\|c\| := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2.$$

Dai precedenti risultati abbiamo che l'applicazione $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \to \ell_2$ che associa ad ogni $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ la successione dei suoi coefficienti di Fourier:

$$\mathcal{F}(f) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{dove} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\,dx,$$

risulta una bijezione. Difatti, dal Corollario 6.1, abbiamo che $\mathcal{F}$ è iniettiva in $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e, dal Teorema 6.8, $\mathcal{F}$ risulta suriettiva su ℓ_2. Osserviamo inoltre che dall'identità di Parseval risulta

$$\|\mathcal{F}(f)\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_2$$

e dunque che $\mathcal{F}$ è un'isometria.

Abbiamo inoltre che data $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, denotati con $c_k(f)$ i suoi coefficienti di Fourier valgono le seguenti proprietà:

- $\mathcal{F}$ è lineare in $\mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g), \quad \forall\, f,g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi]),\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

ovvero per ogni $k \in \mathbb{Z}$ risulta

$$c_k(\alpha f + \beta g) = \alpha c_k(f) + \beta c_k(g) \quad \forall\, f,g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi]),\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

- denotato con

$$(f*g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x-t)g(t)\,dt, \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

il prodotto di convoluzione di $f,g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$[3], risulta

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

ovvero per ogni $k \in \mathbb{Z}$ risulta

$$c_k(f*g) = c_k(f)c_k(g) \quad \forall\, f,g \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi],\mathbb{C}).$$

Infatti, pensando ad $f(x)$ e $g(x)$ prolungate per periodicità su tutto $\mathbb{R}$, dal Teorema di Fubini-Tonelli e dall'invarianza per traslazione dell'integrale, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} (f*g)(x)e^{-ikx}\,dx \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} (\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x-t)g(t)\,dt)e^{-ikx}dx \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[-\pi,\pi]} g(t)(\int_{[-\pi,\pi]} f(x-t)e^{-ikx}\,dx)dt \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[-\pi,\pi]} g(t)(\int_{[-\pi,\pi]} f(y)e^{-iky}dy)e^{-ikt}dt \\
&\quad = (\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} g(t)e^{-ikt}dt)(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(y)e^{-iky}dy)
\end{aligned}$$

- se $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ è derivabile con derivata $f' \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ allora

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Infatti, osservato che dal teorema fondamentale sul calcolo integrale si ha che vale la regola di integrazione per parti

$$\int_{[a,b]} f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{[a,b]} f'(x)g(x)\,dx$$

per ogni $f,g \in \mathcal{L}^1([a,b])$ derivabili con $f',g' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, supposto $f(\pi) = f(-\pi)$, otteniamo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f'(x)e^{-ikx}dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)(-ike^{-ikx})\,dx = ik\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

Consideriamo ora il caso di funzioni a valori reali. Osserviamo, che essendo $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$, risulta

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i},$$

[3] utilizzando il Teorema di Fubini-Tonelli si può provare che per ogni $f,g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ la convoluzione $f*g$ risulta definita q.o. in $[-\pi,\pi]$ e che $f*g \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

e una base dello spazio $\mathcal{P}_n$ dei polinomi trigonometrici di ordine n a valori reali sarà data dalle funzioni $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$, $k = 0, 1, ..., n$. Se $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, posto per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = c_{-k} + c_k \quad \text{e} \quad b_k = \frac{c_{-k} - c_k}{i}$$

e $a_0 = 2c_0$, dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) e^{-ikx}\, dx,$$

si ottiene

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \cos(kx)\, dx \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \sin(kx)\, dx \in \mathbb{R}$$

Si ottiene che il polinomio di Fourier di ordine n relativo ad f sarà

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + c_{-k}) \cos(kx) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \end{aligned}$$

La serie di Fourier di una funzione $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ sarà allora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

e i risultati sopra elencati saranno validi anche nel caso di una funzione a valori reali considerando la serie di Fourier reale appena descritta. In particolare, l'identità di Parseval diventa

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2, \quad \forall f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R}).$$

Infine, osserviamo che i precedenti risultati potranno essere estesi a funzioni definite in intervalli della forma $[-T, T]$ con $T > 0$ arbitrario. Osserviamo difatti che nello spazio $\mathcal{L}^2([-T, T], \mathbb{C})$, munito del prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{[-T,T]} f(x) \overline{g(x)}\, dx,$$

le funzioni $e^{ik\omega x}$ dove $\omega = \frac{\pi}{T}$, costituiscono un sistema ortogonale:

$$\int_{[-T,T]} e^{in\omega x} e^{-im\omega x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 2T & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Data allora $f \in \mathcal{L}^2([-T,T],\mathbb{C})$ potremo considerarne la corrispondente serie di Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega x}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2T}\int_{[-T,T]} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx.$$

Nel caso invece di funzione a valori reali, potremo considerare la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(k\omega x)\,dx \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Esempi

• *Serie di Fourier dell'onda triangolare.* Consideriamo la funzione continua in $[-\pi,\pi]$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

estesa per periodicità su tutto l'asse reale. Tale funzione risulta reale e pari e quindi risulta

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

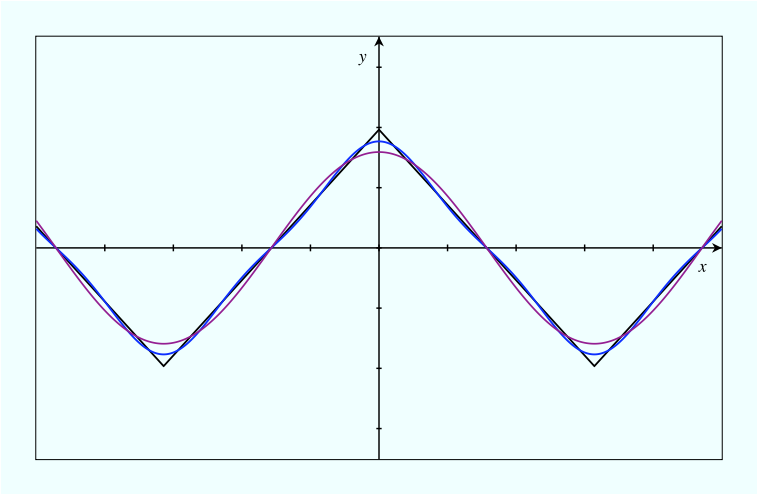
mentre

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari o nullo} \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si ottiene allora che la serie di Fourier di $f(x)$ è

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Essendo $f(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti in $\mathbb{R}$ dai precedenti risultati abbiamo che tale serie converge uniformemente ed in media quadratica a $f(x)$ in ogni intervallo di ampiezza 2π.



• Calcoliamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$, prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Tale funzione risulta reale e pari e quindi risulta

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

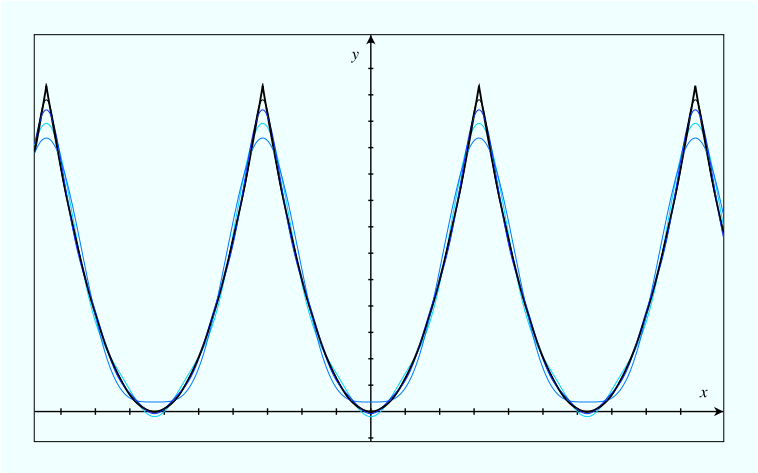
mentre

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(kx)\, dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & \text{se } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Si ottiene allora che la serie di Fourier di $f(x)$ è

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

Essendo $f(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti in $\mathbb{R}$ dai precedenti risultati abbiamo che tale serie converge uniformemente ed in media quadratica a $f(x)$ in ogni intervallo di ampiezza 2π.



Se ne deduce in particolare che per $x = \pi$ risulta

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

e dunque che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

mentre per $x = 0$ si ottiene

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

• *Serie di Fourier dell'onda quadra.* Nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,\pi] \\ -1 & \text{se } x \in [-\pi,0) \end{cases}$$

estesa per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Poichè la funzione risulta reale e dispari avremo

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

mentre

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Si ottiene allora che la serie di Fourier di $f(x)$ è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

Essendo $f(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in $(-\pi, 0)$ e in $(0, \pi)$, dai precedenti risultati abbiamo che tale serie converge uniformemente a $f(x)$ in tali intervalli, dunque:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = 1 \quad \text{uniformemente in } (0, \pi)$$

e

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = -1 \quad \text{uniformemente in } (-\pi, 0)$$

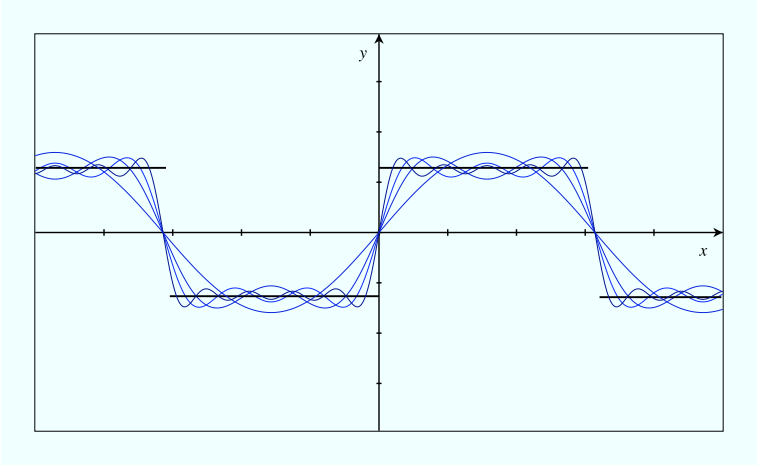
Osserviamo invece che in $x = 0$ e $x = \pm\pi$ la serie risulta identicamente nulla. Abbiamo quindi che la serie converge (puntualmente) alla somma

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, \pi) \\ -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e } x = \pm\pi \end{cases}$$

coincidente con $f(x)$ in $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$. Notiamo che nei punti di discontinuità di $f(x)$ risulta

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

essendo $f(x_0^\pm) = \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$. La funzione $\tilde{f}(x)$ è detta regolarizzata della funzione $f(x)$.



Si ha che la serie non converge uniformemente a $\tilde{f}(x)$ in $[-\pi, \pi]$. Infatti, osserviamo che i polinomi di Fourier di tale funzione risultano essere

$$f_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^x \cos(2k-1)t\,dt$$
$$= \frac{4}{\pi}\int_0^x \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,dt$$

Si ottiene allora che

$$f'_{2n-1}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}$$

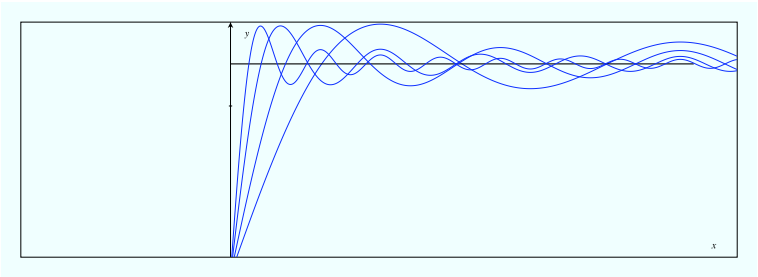
e dunque che $f_{2n-1}(x)$ ammette punti di massimo relativo nei punti

$$\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si può provare che nel punto di massimo più prossimo alla discontinuità di $f(x)$, $\frac{\pi}{2n}$, il polinomio di Fourier assume, per valori di n grande, un valore strettamente maggiore di 1:

$$\lim_{n\to+\infty} f_{2n-1}(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \simeq 1,18$$

Si ha quindi che la serie di Fourier di $f(x)$ non converge uniformemente alla somma $\tilde{f}(x)$: si presenta un fenomeno di "sovraoscillazione" (detto fenomeno di Gibbs) nell'intorno della discontinuità di $f(x)$.



6. Qualche applicazione

Vediamo qualche applicazione della serie di Fourier per determinare soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali.

• Equazione del calore

L'equazione del calore[4] è un'equazione differenziale alle derivate parziali, che modellizza l'andamento della temperatura in un mezzo conduttore in funzione delle coordinate spaziali e del tempo.

[4] Fu proprio lo studio dell'equazione del calore a motivare il matematico francese Joseph Fourier (1768-1830) nello formulazione della teoria dello sviluppo in serie di seni e coseni che portano il suo nome.

Supponiamo di avere una sbarra di lunghezza π il cui raggio è trascurabile rispetto alla lunghezza, in modo da rendere il problema unidimensionale, l'equazione prende la forma

$$\partial_t U(x,t) = a^2 \partial_{xx} U(x,t)$$

dove a è il coefficiente di diffusione (che nel seguito, per semplicità, supporremo pari a 1) e $U(x,t)$ indica la temperatura della sbarra nel punto x e al tempo t. Cerchiamo soluzioni dell'equazione soddisfacenti alla condizione iniziale $U(x,0) = f(x)$ e a delle condizioni al contorno in modo da tenere le due estremità della sbarra a temperatura costante (per semplicità nulla). Cerchiamo quindi soluzioni del problema:

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \partial_{xx} U(x,t), & x \in [0,\pi],\ t \geq 0, \\ U(x,0) = f(x), & x \in [0,\pi], \\ U(0,t) = U(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Per risolvere tale problema, utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, ovvero cerchiamo soluzioni $U(x,t)$ come prodotto di due funzioni, una della sola variabile spaziale e una della sola variabile temporale:

$$U(x,t) = X(x)T(t).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale avremo che tali funzioni dovranno soddisfare l'identità

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

ed osservato che i due termini dell'uguaglianza sono funzioni di variabili diverse, affinchè l'uguaglianza sussista per ogni t e per ogni x, dovremo avere che entrambi i termini risultano uguali ad una costante, poniamo λ. Abbiamo dunque che le due funzioni $X(x)$ e $T(t)$ dovranno risultare soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie

$$T'(t) = \lambda T(t) \quad \text{e} \quad X''(x) = \lambda X(x).$$

Riguardo alla prima equazione, abbiamo che ammette come soluzione generale

$$T(t) = c\, e^{\lambda t}, \text{ dove } c \in \mathbb{R} \text{ è costante arbitraria.}$$

Per la funzione spaziale abbiamo invece il problema ai limiti

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che, per evitare soluzioni banali [5], deve essere $\lambda < 0$ e dunque, integrando l'equazione otteniamo

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

[5] Infatti se $\lambda > 0$ avremo che l'integrale di $U''(x) = \lambda U(x)$ è $U(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ e dalle condizioni iniziali $U(0) = U(\ell) = 0$ otteniamo che $c_1 = c_2 = 0$. Se $\lambda = 0$ la generica soluzione di $U''(x) = 0$ sarà $U(x) = c_1 + c_2 x$ e nuovamente avremo $U(0) = U(\ell) = 0$ solo per $c_1 = c_2 = 0$.

e le condizioni al bordo implicano $X(0) = c_2 = 0$ e $X(\pi) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ da cui $c_1 \in \mathbb{R}$ arbitrario e $\sqrt{-\lambda} = k \in \mathbb{N}$, da cui $\lambda = -k^2$. Abbiamo quindi che ogni funzione della forma

$$U_k(x,t) = c\, e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N},$$

è soluzione dell'equazione di partenza soddisfacente le condizioni $U_k(0,t) = U_k(\pi,t) = 0$. Tuttavia, eccetto il caso in cui $f(x) = c\sin(kx)$, nessuna di esse soddisfa il dato iniziale $U(x,0) = f(x)$. Sfruttiamo dunque la linearità dell'equazione e costruiamo una nuova soluzione sovrapponendo tutte le soluzioni $U_k(x,t)$:

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

Tale soluzione soddisferà il dato iniziale se supponiamo $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$. Estendendo $f(x)$ come funzione dispari in $[-\pi,\pi]$, avremo, per quanto visto, che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx), \quad \text{uniformemente in } [-\pi,\pi],$$

dove

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

Imponendo allora che

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kx) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = f(x)$$

dovremo avere che $c_k = b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque soluzione del problema sarà

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

dove b_k sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier di $f(x)$.

- Equazione delle onde

Supponiamo di avere una corda il cui diametro risulta trascurabile rispetto alla lunghezza $\ell > 0$, in modo da rendere il problema unidimensionale, tesa tra due estremi $(0,0)$ e $(0,\ell)$. Denotata con $u(x,t)$ l'ordinata all'istante t del punto della corda di ascissa x, il movimento della corda risulta descritto dall'equazione l'equazione prende la forma

$$\partial_{xx} u(x,t) = \frac{1}{a^2}\partial_{tt} U(x,t)$$

dove a è una costante pari alla tensione della corda fratto la densità della corda. Cerchiamo soluzioni dell'equazione soddisfacenti alle condizione iniziali $u(x,0) = f(x)$ e $\partial_t u(x,0) = h(x)$ (configurazione e velocità iniziale

della corda) e alle condizioni al contorno $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$. Cerchiamo quindi soluzioni del problema:

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \partial_{xx} U(x,t), & x \in [0,\ell],\ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\ell], \\ \partial_t u(x,0) = h(x), & x \in [0,\ell], \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Per risolvere tale problema utilizziamo nuovamente il metodo di separazione delle variabili, ovvero cerchiamo soluzioni $u(x,t)$ come prodotto di due funzioni, una della sola variabile spaziale e una della sola variabile temporale:

$$u(x,t) = U(x)V(t),$$

chiamate anche *soluzioni stazionarie*. Sostituendo nell'equazione differenziale avremo che tali funzioni (supposte non nulle) dovranno soddisfare l'identità

$$U''(x)V(t) = \frac{1}{a^2}U(x)V''(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{V''(t)}{V(t)}.$$

Poichè i due termini dell'uguaglianza sono funzioni di variabili diverse, dovremo avere che entrambi i termini risultano uguali ad una costante, poniamo λ. Abbiamo dunque che le due funzioni $X(x)$ e $T(t)$ dovranno risultare soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie

$$U''(x) = \lambda U(x) \quad \text{e} \quad V''(t) = \lambda a^2 V(t).$$

Osservato che dalle condizioni al contorno dovrà risultare $U(0) = U(\ell) = 0$, riguardo alla funzione spaziale abbiamo che questa dovrà verificare il problema ai limiti

$$\begin{cases} U''(x) = \lambda U(x), \\ U(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che, per evitare soluzioni banali, deve essere $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $n \in \mathbb{N}$[6], e dunque, integrando otteniamo

$$U(x) = c_n \sin(\sqrt{-\lambda_n}x) = c_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x), \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Posto allora $\omega_n = a\frac{n\pi}{\ell} > 0$ con $n \in \mathbb{N}$ nella seconda equazione otteniamo che la funzione temporale dovrà verificare l'equazione $V''(t) = -\omega_n^2 V(t)$ che ammette come soluzioni

$$V(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t).$$

[6]Infatti se $\lambda \geq 0$, come nel caso dell'equazione del calore, avremo che l'unica dell'equazione $U''(x) = \lambda U(x)$ soddisfacente alle condizioni $U(0) = U(\ell) = 0$ è la funzione identicamente nulla. Mentre se $\lambda < 0$, l'integrale di $U''(x) = \lambda U(x)$ sarà $U(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ e dalle condizioni iniziali si ottiene $U(0) = c_2 = 0$ e $U(\ell) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0$. Dunque $\sqrt{-\lambda}\ell = n\pi$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$.

Abbiamo quindi che ogni funzione della forma

$$u_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)(a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)), \quad n \in \mathbb{N},$$

dove $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ e $\omega_n = a\frac{n\pi}{\ell}$, è soluzione dell'equazione di partenza soddisfacente le condizioni al contorno

$$u_n(0,t) = u_n(\ell,t) = 0.$$

Osserviamo che essendo l'equazione lineare, ogni combinazione lineare finita delle soluzioni $u_n(x,t)$ sarà ancora soluzione, tuttavia, affinchè risultino soddisfatte le condioni iniziali dovremo considerare somme infinite. Cerchiamo dunque una soluzione sovrapponendo tutte le soluzioni $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)(a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)), \quad a_k, b_n \in \mathbb{R} \tag{37}$$

Tale soluzione soddisferà il dato iniziale se supponiamo $f, h \in \mathcal{C}^1([0,\ell])$. Estendendo $f(x)$ e $h(x)$ come funzione dispari in $[-\ell,\ell]$, avremo, per quanto visto, che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x), \quad \text{uniformemente in } [-\ell,\ell],$$

e

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x), \quad \text{uniformemente in } [-\ell,\ell],$$

dove

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx \quad \text{e} \quad C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell h(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx$$

Avremo allora che

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) = f(x)$$

e dunque $a_n \equiv c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, derivando rispetto a t la serie (37) (supposto che ciò sia lecito) si ottiene

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n b_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) = h(x)$$

da cui $b_n \equiv \frac{C_n}{\omega_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque si è ottenuta la soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)(c_n\cos(\omega_n t) + \frac{C_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)).$$

CAPITOLO 7

Trasformata di Fourier

1. Definizione e prime proprietà

Data una funzione $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si dice trasformata di Fourier di f la funzione

$$\Phi(f)(\nu) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

denotata anche con $\hat{f}(\nu)$. Osserviamo che tale funzione risulta definita in ogni $\nu \in \mathbb{R}$ essendo

$$|\Phi(f)(\nu)| = |\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty$$

per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. In particolare si ottiene che $\Phi(f) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e che

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq \|f\|_1, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

da cui segue che se $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è tale che $\|f_k - f\|_1 \to 0$ per $k \to +\infty$, allora $\|\Phi(f_k) - \Phi(f)\|_\infty \to 0$ per $k \to +\infty$. Si ha quindi che $\Phi : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è funzione continua. Si ha inoltre

Teorema 7.1. (sulla continuità della trasformata di Fourier)
Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora $\Phi(f) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ed inoltre

$$\lim_{|\nu| \to +\infty} \Phi(f)(\nu) = 0.$$

Dim. La continuità segue dal Teorema 5.14 sulla continuità dell'integrale dipendente da un parametro: essendo $g(\nu, t) = f(t) e^{-2\pi i \nu t}$ funzione continua nella variabile $\nu \in \mathbb{R}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$|g(\nu, t)| \leq |f(t)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Per quanto riguarda il comportamento per $|\nu| \to +\infty$, osserviamo che poichè $e^{-2\pi i \nu t} = \cos(2\pi\nu t) - i \sin(2\pi\nu t)$ e $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, dal Lemma di Riemann-Lebesgue si ottiene che $\Phi(f)(\nu) \to 0$ per $|\nu| \to +\infty$. □

Denotato con $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue infinitesime all'infinito, abbiamo dunque che se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora $\Phi(f) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Vediamo come primo esempio di calcolare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}(t)$, risulta

$$\Phi(\chi_{[a,b]})(\nu) = \int_a^b e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = 0 \\ \frac{e^{-2\pi i a \nu} - e^{-2\pi i b \nu}}{2\pi i \nu} & \text{se } \nu \neq 0 \end{cases}$$

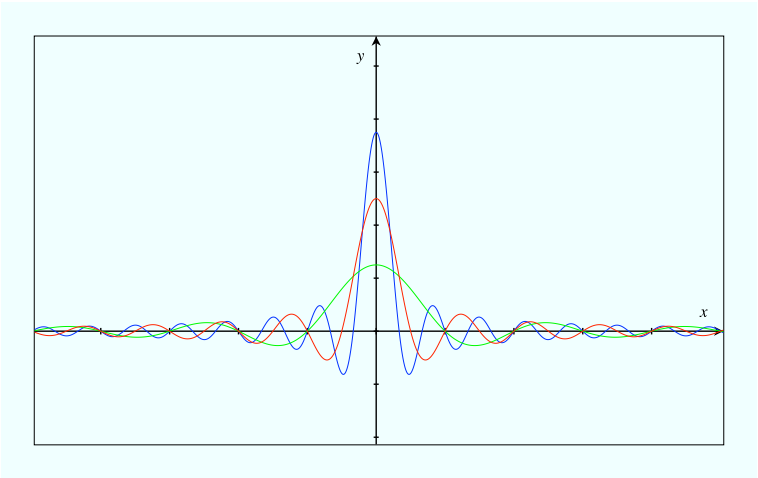
In particolare si ha che

$$\Phi(\chi_{[-a,a]})(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = 0 \\ \frac{e^{2\pi i a\nu} - e^{-2\pi i a\nu}}{2\pi i\nu} = \frac{\sin(2a\pi\nu)}{\pi\nu} & \text{se } \nu \neq 0 \end{cases}$$

Denotata con $\operatorname{sinc} x$, seno cardinale, la funzione

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

otteniamo che $\Phi(\chi_{[-a,a]})(\nu) = 2a \operatorname{sinc}(2a\nu)$.



Vediamo ora alcune proprietà elementari della trasformata di Fourier. È immediato verificare che Φ è lineare, ovvero vale

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, si dice simmetrizzata di $f(x)$ la funzione $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che se $f(x)$ è funzione pari allora $f(x) = \tilde{f}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre se $f(x)$ è funzione dispari allora $f(x) = -\tilde{f}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si dice invece coniugata della simmetrizzata la funzione $f*(x) = \overline{f(-x)}$. Valgono allora le seguenti proprietà

PROPOSIZIONE 7.1. *Per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ risulta*

(i) *la trasformata della simmetrizzata è pari alla simmetrizzata della trasformata:*

$$\Phi(\tilde{f}) = \tilde{\Phi(f)};$$

(ii) *la trasformata della coniugata è la coniugata della simmetrizzata della trasformata:*

$$\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*;$$

(iii) *la trasformata della coniugata della simmetrizzata è la coniugata della trasformata:*

$$\Phi(f^*) = \overline{\Phi(f)}.$$

Dim. (i) Operando la sostituzione $s = -t$ si ha

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{f})(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)e^{-2\pi i\nu t}dt = \int_{\mathbb{R}} f(-t)e^{-2\pi i\nu t}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-2\pi i(-\nu)s}ds = \Phi(f)(-\nu) = \Phi(\tilde{f})(\nu).\end{aligned}$$

(ii) Osservato che l'integrale del coniugato è uguale al coniugato dell'integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi(\overline{f})(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t)e^{-2\pi i\nu t}dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)e^{-2\pi i(-\nu)t}}dt \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i(-\nu)t}dt} = \overline{\Phi(f)}(-\nu) = (\Phi(f))^*(\nu).\end{aligned}$$

(iii) Analogalmente, posto $s = -t$ otteniamo

$$\begin{aligned}\Phi(f^*)(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-t)}e^{-2\pi i\nu t}dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(s)}e^{2\pi i\nu s}ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(s)e^{-2\pi i\nu s}}ds = \overline{\Phi(f)}(\nu).\end{aligned}$$

□

In particolare, otteniamo

- *se $f(x)$ è sommabile in $\mathbb{R}$ e pari allora $\Phi(f)(\nu)$ è pari.*
  Infatti, essendo $\tilde{f} = f$, da (i) segue che $\Phi(f) = \Phi(\tilde{f})$ e dunque che $\Phi(f)$ è pari.

- *se $f(x)$ è sommabile a valori reali e pari allora $\Phi(f)(\nu)$ è a valori reali.*
  Infatti, essendo f a valori reali e pari si ha che $f^*(t) = \overline{f(-t)} = f(-t) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque, da (*iii*) segue che $\Phi(f) = \Phi(f^*) = \overline{\Phi(f)}$ da cui che $\Phi(f)$ risulta a valori reali.
  Essendo $e^{-2\pi i\nu t} = \cos(2\pi\nu t) - i\sin(2\pi\nu t)$, otteniamo che se $f(x)$ è sommabile a valori reali e pari allora
  $$\Phi(f)(\nu) = 2\int_{[0,+\infty)} f(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt.$$

- *se $f(x)$ è sommabile e dispari allora $\Phi(f)(\nu)$ è dispari.*
  Infatti, essendo $\tilde{f} = -f$, da (i) e dalla linearità della trasformata si ottiene che $-\Phi(f) = \Phi(\tilde{f}) = \Phi(\tilde{f})$.

- *se $f(x)$ è sommabile a valori reali e dispari allora $\Phi(f)(\nu)$ è valori immaginari puri.*
  Infatti essendo f a valori reali e dispari si ha che $f^*(t) = \overline{f(-t)} = f(-t) = -f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque, da (*iii*) segue che $-\Phi(f) = \Phi(f^*) = \overline{\Phi(f)}$ e dunque che $\Phi(f)$ risulta a valori immaginari puri.

Otteniamo quindi che se $f(x)$ è sommabile a valori reali e dispari allora

$$\Phi(f)(\nu) = -2i \int_{[0,+\infty)} f(t) \sin(2\pi\nu t)\, dt.$$

Utilizzando le precedenti proprietà, calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = e^{-|t|}$. Osservato che $f(t)$ è sommabile, reale e pari, da quanto sopra si ha che $\Phi(f)$ risulta reale e pari. Si ha dunque

$$\Phi(f)(\nu) = 2 \int_{[0,+\infty)} e^{-t} \cos(2\pi\nu t)\, dt.$$

Osservato che l'integranda risulta assolutamente integrabile in senso improprio, integrando per parti due volte otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,+\infty)} e^{-t} \cos(2\pi\nu t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(2\pi\nu t)\, dt \\ &= \left[-e^{-t} \cos(2\pi\nu t)\right]_0^{+\infty} - 2\pi\nu \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(2\pi\nu t)\, dt \\ &= 1 - 2\pi\nu(\left[-e^{-t} \sin(2\pi\nu t)\right]_0^{+\infty} + 2\pi\nu \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(2\pi\nu)\, dt) \\ &= 1 - (2\pi\nu)^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(2\pi\nu)\, dt) = 1 - (2\pi\nu)^2 I \end{aligned}$$

da cui

$$I = \frac{1}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

e quindi

$$\Phi(f)(\nu) = \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2} \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Vediamo ora il comportamento della trasformata rispetto ad omotetie e traslazioni.

PROPOSIZIONE 7.2. *Data $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posto*

$$f_a(t) := f(at) \quad e \quad \tau_a f(t) := f(t - a),$$

risulta

$$\Phi(f_a)(\nu) = \frac{1}{|a|} \Phi(f)(\frac{\nu}{a}) \quad e \quad \Phi(\tau_a f)(\nu) = e^{-2\pi i a \nu} \Phi(f)(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

DIM. Per provare la prima identità, operando la sostituzione $s = at$, se $a > 0$ otteniamo

$$\Phi(f_a)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(at) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-2\pi i \nu \frac{s}{a}} \frac{1}{a}\, ds = \frac{1}{a} \Phi(f)(\frac{\nu}{a}).$$

Se invece $a < 0$, allora (osservato che con la sostituzione $s = at$ gli estremi di integrazione vengono scambiati) otteniamo

$$\Phi(f_a)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(at) e^{-2\pi i \nu t} dt = -\int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-2\pi i \nu \frac{s}{a}} \frac{1}{a}\, ds = -\frac{1}{a} \Phi(f)(\frac{\nu}{a}).$$

Per provare la seconda identità, posto $s = t - a$, si ottiene

$$\Phi(\tau_a f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t-a)e^{-2\pi i\nu t}dt = e^{-2\pi i\nu a}\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-2\pi i\nu s}\,ds = e^{-2\pi i\nu a}\Phi(f)(\nu).$$

□

Utilizziamo i precedenti risultati per calcolare la trasformata di Fourier delle *funzioni triangolari*. Consideriamo la funzione

$$f(t) = \max\{1-|t|;0\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Essendo la funzione pari e reale, otteniamo che $\Phi(f)$ risulta reale e dunque

$$\begin{aligned}\Phi(f)(\nu) &= 2\int_0^1 (1-t)\cos(2\pi\nu t)\,dt \\ &= 2\left[(1-t)\frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi\nu}\int_0^1 \sin(2\pi\nu t)\,dt \\ &= \frac{1}{2(\pi\nu)^2}\left[-\cos(2\pi\nu t)\right]_0^1 = \frac{1-\cos(2\pi\nu)}{2(\pi\nu)^2} = \frac{\sin^2(2\pi\nu)}{(\pi\nu)^2} = \operatorname{sinc}^2(\nu)\end{aligned}$$

Dalla precedente Proposizione otteniamo allora che, per $a > 0$, la funzione

$$g(t) = \max\{1-|\frac{t}{a}|;0\} = f(\frac{t}{a})$$

ha trasformata

$$\Phi(g)(\nu) = a\Phi(f)(\nu a) = a\operatorname{sinc}^2(\nu a).$$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Osservato che la funzione è pari e a valori reali, utilizzando il Teorema dei residui abbiamo provato che

$$\Phi(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\nu t)}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

Ne segue allora che la trasformata di Fourier delle *funzioni Lorentziane* $f_a(t) = \frac{1}{a^2+t^2} = \frac{1}{a^2}f(\frac{t}{a})$ è

$$\Phi(f_a)(\nu) = \frac{1}{a^2}|a|\Phi(f)(a\nu) = \frac{\pi}{|a|}e^{-2\pi|a\nu|}.$$

Si ha inoltre

PROPOSIZIONE 7.3. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{R}$ allora, posto $g_a(t) = e^{2\pi iat}f(t)$, risulta*

$$\Phi(e^{2\pi iat}f(t))(\nu) = \Phi(f)(\nu - a), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

DIM. Osservato che $e^{2\pi iat}f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ si ha

$$\Phi(e^{2\pi iat}f(t))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi iat}e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i(\nu-a)t}\,dt = \Phi(f)(\nu-a).$$

□

Ricordando che $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, dalla precedente proposizione si ottiene

PROPOSIZIONE 7.4. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{R}$ allora*

$$\Phi(f(t)\cos(2\pi a t))(\nu) = \frac{1}{2}(\Phi(f)(\nu - a) + \Phi(f)(\nu + a)), \quad \forall \nu \in \mathbb{R},$$

mentre

$$\Phi(f(t)\sin(2\pi a t))(\nu) = \frac{1}{2i}(\Phi(f)(\nu - a) - \Phi(f)(\nu + a)), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Ad esempio, essendo

$$\Phi(\frac{1}{1+t^2})(\nu) = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

otteniamo

$$\Phi(\frac{\cos(2\pi t)}{1+t^2})(\nu) = \frac{1}{2}(\Phi(\frac{1}{1+t^2})(\nu-1)+\Phi(\frac{1}{1+t^2})(\nu+1)) = \frac{\pi}{2}(e^{-2\pi|\nu-1|}+e^{-2\pi|\nu+1|}).$$

Vediamo ora il comportamento della trasformata rispetto all'operazione di derivazione. Abbiamo

PROPOSIZIONE 7.5. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è tale che, posto $g(t) = tf(t)$, risulta $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora $\Phi(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e vale*

$$\Phi(f)'(\nu) = -2\pi i \Phi(g)(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R},$$

ovvero risulta

$$\Phi(f)'(\nu) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} t f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

DIM. Il risultato segue dal Teorema 5.14 sulla derivabilità degli integrali dipendenti da un parametro. Infatti $g(\nu, t) = f(t)e^{-2\pi i \nu t}$ è funzione derivabile rispetto alla variabile $\nu \in \mathbb{R}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e risulta

$$|\frac{\partial g}{\partial \nu}(\nu, t)| = |2\pi i t f(t) e^{-2\pi i \nu t}| \leq 2\pi |t f(t)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

□

Più in generale abbiamo

PROPOSIZIONE 7.6. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è tale che, posto $g_m(t) = t^m f(t)$ per $m \in \mathbb{N}$, risulta $g_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora $\Phi(f) \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e vale*

$$\Phi(f)^{(m)}(\nu) = (-2\pi i)^m \Phi(g_m)(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R},$$

ovvero risulta

$$\Phi(f)^{(m)}(\nu) = (-2\pi i)^m \int_{\mathbb{R}} t^m f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Riguardo alla trasformata della derivata abbiamo

PROPOSIZIONE 7.7. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti con $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora*

$$\Phi(f')(\nu) = 2\pi i \nu \, \Phi(f)(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Dim. Infatti, osservato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} f'(s)\,ds$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_{[0,+\infty)} f'(s)\,ds \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) - \int_{(-\infty,0]} f'(s)\,ds.$$

Essendo $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, si ottiene che i precedenti due limiti esistono finiti. Poichè $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, tali limiti non potranno che essere nulli. Ne segue che

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)e^{-2\pi x\nu}| = \lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Quindi, integrando per parti, si ottiene

$$\Phi(f')(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \left[e^{-2\pi i\nu t}f(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt = 2\pi i\nu\,\Phi(f)(\nu).$$

□

Dal precedente risultato si ottiene inoltre

Proposizione 7.8. *Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ è di classe $\mathcal{C}^{m-1}$ con $f^{(m-1)}$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti e se $f^{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ per ogni $k = 1, 2, ...m$, allora*

$$\Phi(f^{(m)})(\nu) = (2\pi i\nu)^m \Phi(f)(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Ricordando che per ogni $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ risulta $\Phi(g)(\nu) \to 0$ per $|\nu| \to +\infty$, nelle ipotesi del precedente risultato si ha che

$$(2\pi\nu)^m \Phi(f)(\nu) \to 0 \quad \text{per } |\nu| \to +\infty$$

e quindi che l'ordine di infinitesimo di $\Phi(f)(\nu)$ per $|\nu| \to +\infty$ è maggiore di m.

Come applicazione proviamo che la trasformata delle *funzioni Gaussiane* $f_a(t) = e^{-at^2}$ con $a > 0$ è pari a

$$\Phi(f_a)(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}.$$

A tale scopo, consideriamo innanzitutto la funzione $f(t) = e^{-t^2}$. Abbiamo che

$$\Phi(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2\pi i\nu t}\,dt$$

e per calcolare l'ultimo integrale potremo utilizzare il Teorema dei residui. In alternativa, osserviamo che

$$\Phi(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Abbiamo inoltre che

$$f'(t) = -2tf(t)$$

ed applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membro, da quanto sopra, otteniamo

$$\Phi(f')(\nu) = \frac{1}{\pi i}\Phi(f)'(\nu).$$

Poichè $\Phi(f')(\nu) = 2\pi i\nu\Phi(f)(\nu)$, ne segue che

$$2\pi i\nu\Phi(f)(\nu) = \frac{1}{\pi i}\Phi(f)'(\nu)$$

ovvero che $\Phi(f)(\nu)$ deve risolvere l'equazione differenziale $\Phi(f)'(\nu) = -2\pi^2\nu\Phi(f)(\nu)$ con la condizione iniziale $\Phi(f)(0) = \sqrt{\pi}$. Ne segue allora che

$$\Phi(f)(\nu) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}.$$

Dai precedenti risultati segue allora che essendo $f_a(t) = e^{-at^2} = f(\sqrt{a}t)$ si ha

$$\Phi(f_a)(\nu) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Phi(f)(\frac{\nu}{\sqrt{a}}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}.$$

Calcoliamo ora la trasformata della funzione $g_a(t) = te^{-at^2}$. Posto $f_a(t) = e^{-at^2}$, dai precedenti risultati otteniamo

$$\Phi(f_a)'(\nu) = -2\pi i\Phi(g_a)(\nu).$$

Poichè abbiamo visto che

$$\Phi(f_a)(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}},$$

ne segue

$$\Phi(g_a)(\nu) = -\frac{1}{2\pi i}\Phi(f_a)'(\nu) = -\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}(-2\frac{\pi^2\nu}{a}) = -i\nu\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

In alternativa, osservato che $g_a(t) = -\frac{1}{2a}f_a'(t)$, dai precedenti risultati otteniamo

$$\Phi(g_a)(\nu) = -\frac{1}{2a}\Phi(f_a')(\nu) = -\frac{\pi i\nu}{a}\Phi(f_a)(\nu) = -i\nu\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

Tabella 1. Alcune Trasformate di Fourier

	$f(t)$	$\Phi(f)(\nu)$
Funzioni caratteristiche	$\chi_{[-a,a]}(t)$	$2a\mathrm{sinc}(2a\nu)$
Funzioni triangolari	$\max\{1-\lvert\frac{t}{a}\rvert;0\}$	$a\mathrm{sinc}^2(a\nu)$
Funzioni esponenziali	$e^{-\lvert at\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi\nu)^2}$
Funzioni Lorentziane	$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}e^{-2\pi\lvert a\nu\rvert}$
Funzioni Gaussiane	e^{-at^2}, $a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$

Vediamo infine il comportamento della trasformata rispetto al prodotto di convoluzione:

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\,ds, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Osserviamo che $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ in quanto, dal Teorema di Fubini e dall'invarianza per traslazione dell'integrale, risulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f * g(t)|\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(t-s)g(s)|\,ds)\,dt = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(t-s)|\,dt)|g(s)|\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f\|_1 |g(s)|\,ds = \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

da cui in particolare segue che $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Abbiamo

PROPOSIZIONE 7.9. *Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora*

$$\Phi(f * g)(\nu) = \Phi(f)(\nu)\Phi(g)(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

DIM. Dal Teorema di Fubini-Tonelli, essendo $h(t,s) = f(t-s)g(s)e^{-2\pi i\nu t}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\Phi(f * g)(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} f * g(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\,ds)e^{-2\pi i\nu t}\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(t-s)e^{-2\pi i\nu(t-s)}\,dt)g(s)e^{-2\pi i\nu s}\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(\theta)e^{-2\pi i\nu\theta}\,d\theta)g(s)e^{-2\pi i\nu s}\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)e^{-2\pi i\nu\theta}\,d\theta \int_{\mathbb{R}} g(s)e^{-2\pi i\nu s}\,ds \\ &= \Phi(f)(\nu)\Phi(g)(\nu)\end{aligned}$$

□

2. ANTITRASFORMATA E TEOREMA DI DUALITÀ

Risulta utile determinare quando è possibile risalire ad una funzione una volta nota la sua trasformata. Diamo allora la seguente definizione.

Data $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si dice antitrasformata di Fourier di f la funzione

$$\Psi(f)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\Psi(f)(x) = \Phi(f)(-x)$ ovvero $\Psi(f)$ è la simmetrizzata di $\Phi(f)$ e dunque vale

$$\Psi(f) = \Phi(\tilde{f}) = \Phi(\tilde{f}).$$

L'antitrasformata verifica ovviamente tutte le proprietà della trasformata. Abbiamo inoltre

TEOREMA 7.2. (FORMULA DI INVERSIONE)
Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tale che $\Phi(f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Allora $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale

$$f(t) = \Psi(\Phi(f))(t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(f)(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-2\pi i\nu s}\,ds)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu.$$

Tabella 2. Proprietà della Trasformata di Fourier

$\Phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\Phi(f)+\beta\Phi(g)$	$f,g\in\mathcal{L}^1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$
$\Phi(f(at))(\nu)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\Phi(f)(\frac{\nu}{a})$	$f\in\mathcal{L}^1,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\Phi(f(t-a))=e^{2\pi i\nu a}\Phi(f)(\nu)$	$f\in\mathcal{L}^1,\ a\in\mathbb{R}$
$\Phi(e^{2\pi iat}f(t))(\nu)=\Phi(f)(\nu-a)$	$f\in\mathcal{L}^1,\ a\in\mathbb{R}$
$\Phi(\cos(2\pi at)f(t))(\nu)=\frac{1}{2}(\Phi(f)(\nu-a)+\Phi(f)(\nu+a))$	$f\in\mathcal{L}^1,\ a\in\mathbb{R}$
$\Phi(\sin(2\pi at)f(t))(\nu)=\frac{1}{2i}(\Phi(f)(\nu-a)-\Phi(f)(\nu+a))$	$f\in\mathcal{L}^1,\ a\in\mathbb{R}$
$\Phi(f)^{(m)}(\nu)=(-2\pi i)^m\Phi(t^mf(t))(\nu)$	$t^mf(t)\in\mathcal{L}^1$
$\Phi(f^{(m)})(\nu)=(2\pi i\nu)^m(\Phi(f)(\nu)$	$f\in\mathcal{C}^m,\ f^{(k)}\in\mathcal{L}^1,\ 1\le k\le m$
$\Phi(f*g)(\nu)=\Phi(f)(\nu)\Phi(g)(\nu)$	$f,g\in\mathcal{L}^1$

Si osservi che per provare la precedente formula non si può scambiare l'ordine di integrazione in quanto la funzione $f(s)e^{2\pi i\nu(t-s)}$ non appartiene a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, infatti $|f(s)e^{2\pi i\nu(t-s)}|=|f(s)|\notin\mathcal{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Per la dimostrazione viene usato un metodo di regolarizzazione mediante la convoluzione.

Ne segue in particolare

Corollario 7.1. $\Phi:\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *è iniettiva.*

Dim. Infatti, se $f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sono tali che $\Phi(f)=\Phi(g)$, allora $\Phi(f-g)=0\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e dalla formula di inversione otteniamo che $f(t)-g(t)=0$ in $\mathbb{R}$ e dunque che $f=g$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. □

Si ottiene allora che $\Phi:\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})\cap\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})\to\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})\cap\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ risulta una bijezione.

Come esempio di applicazione, determiniamo il prodotto di convoluzione

$$\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}*\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(t)=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(t-s)\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(s)\,ds=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(t-s)ds.$$

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier della funzione caratteristica $\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(t)$ è $a\mathrm{sinc}(\nu a)$, mentre la trasformata di Fourier della funzione triangolare $f_a(t)=\max\{1-|\frac{t}{a}|;0\}$ è $a\mathrm{sinc}^2(\nu a)$. Dunque

$$\Phi(\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]})\Phi(\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]})=a\Phi(f_a).$$

Dal precedente risultato abbiamo allora che

$$\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]} * \chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(t) = af_a(t) = \max\{a - |t|; 0\}$$

Determiniamo ora il prodotto di convoluzione $f_a * f_b$ essendo $f_a(t) = e^{-at^2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbiamo visto che $\Phi(f_a)(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$ e dunque

$$\Phi(f_a * f_b)(\nu) = \Phi(f_a)(\nu)\Phi(f_b)(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\pi^2\nu^2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Posto $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ abbiamo allora che

$$\Phi(f_a * f_b)(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{c}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\sqrt{\frac{c}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{c}} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\Phi(f_c)(\nu).$$

Essendo la trasformata iniettiva ne segue allora che

$$f_a * f_b(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-ct^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{ab}{a+b}t^2}.$$

Abbiamo inoltre

TEOREMA 7.3. (LEMMA DI DUALITÀ)
Se $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(f)(t)\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \Phi(g(t))\, dt.$$

DIM. Osservato che

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-2\pi i t\theta}| dt)|g(\theta)| d\theta = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

dal Teorema di Fubini-Tonelli otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(f)(t)\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(\theta)e^{-2\pi i\theta t}\, d\theta) g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\theta t}\, dt) f(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} \Phi(g)(\theta) f(\theta) d\theta.$$

□

3. TRASFORMATA DI FOURIER IN $\mathcal{L}^2$

Come nel caso delle serie di Fourier, la teoria della trasformata in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è più simmetrica rispetto a quella in $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Faremo solo un breve cenno.

Osserviamo che $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \not\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mentre dalla diseguaglianza di Hölder si ha che per ogni $R > 0$ risulta $\mathcal{L}^2([-R, R], \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^1([-R, R], \mathbb{C})$ [1]. Data allora $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, osservato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\chi_{[-n,n]} f \in \mathcal{L}^2([-n, n], \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^1([-n, n], \mathbb{C})$ e dunque risulta definita $\Phi(\chi_{[-n,n]} f)(\nu)$ per

[1] infatti risulta $\|f\|_1 \leq \mu(E)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$ per ogni $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < +\infty$

ogni $n \in \mathbb{N}$, diciamo trasformata di Fourier di f (o anche trasformata di Fourier-Plancherel) la funzione

$$\phi(f)(\nu) := \lim_{n\to+\infty} \Phi(\chi_{[-n,n]}f)(\nu) = \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

dove il limite si intende in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Si può provare (Teorema di Plancherel) che tale definizione è ben posta, ovvero che la successione delle trasformate $\Phi(\chi_{[-n,n]}f)(\nu)$ è convergente in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Si ha inoltre che se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, allora $\phi(f) \equiv \Phi(f)$. Infine si può provare che vale la seguente identità, analoga dell'identità di Parseval per le serie di Fourier:

$$\|\phi(f)\|_2 \equiv \|f\|_2.$$

Osserviamo che dalla definizione, se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e risulta integrabile secondo Riemann in ogni intervallo della forma $[-n,n]$ allora risulta

$$\Phi(f)(\nu) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt.$$

dove abbiamo denotato con $v.p.$ il valore principale secondo Cauchy.

Ad esempio, abbiamo visto che la funzione sinc è la trasformata della funzione caratteristica $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Osservato che sinc $\notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mentre sinc $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e risulta integrabile secondo Riemann in ogni intervallo della forma $[-n,n]$, possiamo calcolarne la sua trasformata nel seguente modo

$$\phi(\mathrm{sinc})(\nu) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \mathrm{sinc}(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\,dt.$$

Essendo $\mathrm{sinc}(t)$ pari e a valori reali otteniamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} \mathrm{sinc}(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\,dt &= 2\int_0^n \frac{\sin \pi t}{\pi t}\cos(2\pi\nu t)\,dt \\ &= \int_0^n \frac{\sin(2\pi\nu t + \pi t) - \sin(2\pi\nu t - \pi t)}{\pi t}\,dt\end{aligned}$$

e dunque

$$\phi(\mathrm{sinc})(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t + \pi t)}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t - \pi t)}{t}\,dt.$$

Operando la sostituzione $\theta = \pi(2\nu+1)t$ nel primo integrale e $\theta = \pi(2\nu-1)t$ nel secondo, ricordando che con il metodo dei residui abbiamo provato che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{sinc})(\nu) &= \mathrm{sgn}(2\nu+1)\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta - \mathrm{sgn}(2\nu-1)\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{sgn}(2\nu+1)-\mathrm{sgn}(2\nu-1)) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\nu|<\frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |\nu|>\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \nu=\pm\frac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

e dunque che $\phi(\mathrm{sinc})$ coincide con la regolarizzata della caratteristica $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$, denotata talvolta con $\mathrm{rect}(t)$.

4. Applicazione alle equazioni differenziali

L'utilizzo della trasformata di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali si basa sul fatto che essa trasforma l'operazione di derivazione in quella di prodotto per una variabile indipendente.

• Equazioni differenziali ordinarie lineari

Supponiamo di avere un'equazione differenziali lineare a coefficienti costanti:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = f(t)$$

Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione e denotata con $z(\nu) = \Phi(y)(\nu)$ e $g(\nu) = \Phi(f)(\nu)$, otteniamo l'equazione algebrica

$$((2\pi i\nu)^n + a_1(2\pi i\nu)^{n-1} + ... + a_{n-1}(2\pi i\nu) + a_n)z(\nu) = g(\nu)$$

Tuttavia il metodo non viene spesso utilizzato in quanto l'operazione risulta lecita solo se si suppone che la funzione incognita $y(t)$ risulti sommabile in tutto $\mathbb{R}$, e ciò per le soluzioni di equazioni differenziali lineari non è sempre valido.

Come ulteriore esempio, determiniamo le soluzioni dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti

$$y''(t) + 2\pi t y'(t) + 2\pi y(t) = 0.$$

Supposto $y, y', y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e denotata con $z(\nu) = \Phi(y)(\nu)$, osservato che

$$\begin{aligned}\Phi(2\pi t y'(t))(\nu) &= -\frac{1}{i}\Phi(-2\pi i t y'(t))(\nu) = -\frac{1}{i}\Phi(y'(t))'(\nu) \\ &= -\frac{1}{i}(2\pi i\nu z(\nu))' = -2\pi(z(\nu)+\nu z'(\nu)),\end{aligned}$$

applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione otteniamo allora

$$(2\pi i\nu)^2 z(\nu) - 2\pi(z(\nu)+\nu z'(\nu)) + 2\pi z(\nu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'(\nu) = -2\pi\nu z(\nu)$$

che ammette come soluzione $z(\nu) = z(0)e^{-\pi\nu^2}$. Essendo $e^{-\pi\nu^2}$ la trasformata di $e^{-\pi t^2}$ (gaussiana con $a = \pi$), ne deduciamo che soluzioni dell'equazione sono $y(t) = ke^{-\pi t^2}$.

L'applicazione della trasformata di Fourier risulta invece essenziale nella risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali dove permette, sotto opportune ipotesi, di ridurre l'equazione ad un'equazione differenziale ordinaria. Come esempio notevole consideriamo nuovamente l'equazione del calore.

• Equazione del calore

Supponiamo di avere un mezzo conduttore di lunghezza infinita. Indicata con $U(x,t)$ la temperatura del mezzo nel punto $x \in \mathbb{R}$ al tempo $t > 0$ l'equazione prende la forma

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t).$$

Cerchiamo soluzioni dell'equazione soddisfacenti alla condizione iniziale $U(x,0) = u_0(x)$. Supposto che $u_0, u_0', u_0'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, cerchiamo soluzioni della nostra equazione tali che:
- $u(x,t)$, $\partial_x u(x,t)$ e $\partial_{xx} u(x,t)$ sommabili rispetto ad x in $\mathbb{R}$;
- esiste $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tale che per ogni $T > 0$ si abbia $|\partial_t u(x,t)| \leq \phi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $t \in [0,T]$.

Applicando la trasformata di Fourier (rispetto alla variabile $x \in \mathbb{R}$) ad ambo i membri dell'equazione differenziale. Essendo

$$\Phi(\partial_{xx} u)(\lambda,t) = (2\pi i\nu)^2 \Phi(u)(\nu,t) = -4\pi^2\nu^2\Phi(u)(\nu,t)$$

mentre, dal Teorema sulla derivabilità dell'integrale dipendente da un parametro otteniamo

$$\Phi(\partial_t u)(\nu,t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x,t) e^{-2\pi i\nu x}\, dx = \partial_t \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-2\pi i\nu x}\, dx = \partial_t \Phi(u)(\nu,t).$$

Posto allora $v(\nu,t) = \Phi(u)(\nu,t)$, l'equazione differenziale si riduce all'equazione ordinaria

$$\partial_t v(\nu,t) = -4\pi^2\nu^2 v(\nu,t) \tag{38}$$

che dovrà verificare il dato iniziale

$$v(\nu,0) = \Phi(u_0)(\nu) = v_0(\nu).$$

La soluzione di tale problema risulta evidentemente la funzione

$$v(\nu,t) = v_0(\nu)e^{-4\pi^2\nu^2 t}.$$

Per ottenere la soluzione del problema iniziale, dobbiamo risalire alla funzione $u(x,t)$ che ha per trasformata $v(\nu,t)$. Ricordando allora che

$$\Phi(e^{-ax^2})(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

riconosciamo

$$e^{-4\pi^2\nu^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\Phi(e^{-\frac{x^2}{4t}})(\nu).$$

Dunque si ottiene

$$\Phi(u(x,t))(\nu) = v(\nu,t) = \Phi(u_0)(\nu)\Phi(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}})(\nu) = \Phi(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}u_0(x)*e^{-\frac{x^2}{4t}})(\nu).$$

Dall'iniettività della trasformata segue allora che

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}u_0(x) * e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x-\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi.$$

CAPITOLO 8

Trasformata di Laplace

1. Definizione e prime proprietà

Data una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita in un intervallo I contenente il semiasse $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$, si dice trasformata di Laplace di f la funzione

$$\Lambda(f)(s) := \int_{\mathbb{R}^+} f(t)e^{-st}\, dt,$$

definita nell'insieme

$$S(f) := \{s \in \mathbb{C} \,|\, f(t)e^{-st} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)\},$$

detto insieme di convergenza assoluta della trasformata $\Lambda(f)$.

Osserviamo che la funzione $f(t)e^{-st}$ risulta sommabile in $\mathbb{R}^+$ se e solo se risulta tale $|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-Re(s)t}$. Inoltre, se $\sigma \in \mathbb{C}$ è tale che $Re(\sigma) > Re(s)$, allora $|e^{-\sigma t}| < |e^{-st}|$ e dunque $|f(t)e^{-\sigma t}| < |f(t)e^{-st}|$. Abbiamo allora che $S(f)$ risulta un semipiano e precisamente, posto

$$\rho(f) := \inf\{p \in \mathbb{R} \,|\, e^{-pt}f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)\},$$

risulta

$$S(f) = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) > \rho(f)\} \quad \text{oppure} \quad S(f) = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) \geq \rho(f)\}.$$

Infatti, se $Re(s) > \rho(f)$ allora esiste $p \in \mathbb{R}$ con $e^{-pt}f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ tale che $p < Re(s)$, ne segue allora che $|f(t)e^{-st}| < |f(t)e^{-pt}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ e dunque che $s \in S(f)$. Se invece $Re(s) < \rho(f)$, allora $e^{-Re(s)t}f(t) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ e dunque $e^{-st}f(t) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$, ovvero $s \notin S(f)$. Rimane invece dubbio il caso in cui $Re(s) = \rho(f)$.

Nel seguito chiameremo $\rho(f)$ ascissa di convergenza della trasformata $\Lambda(f)$. Osserviamo che per quanto sopra provato abbiamo che eventualmente $\rho(f) = -\infty$, in tale caso avremo che $S(f) \equiv \mathbb{C}$.

Diremo nel seguito che una funzione $f : I \to \mathbb{C}$ (con $\mathbb{R}^+ \subset I$) è trasformabile secondo Laplace o brevemente $\mathcal{L}$-trasformabile se esiste $s \in \mathbb{C}$ tale la funzione $f(t)e^{-st}$ risulti sommabile in $\mathbb{R}^+$, ovvero per la quale $S(f) \neq \emptyset$.

Osserviamo che data una funzione $f(t)$ definita in $I \supset \mathbb{R}^+$ ed $\mathcal{L}$-trasformabile, posto

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

risulta $\Lambda(f_0)(s) = \Lambda(f)(s)$ per ogni $s \in \mathcal{S}(f)$. Nel seguito penseremo quindi ad una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile come ad una funzione nulla per $t < 0$.

Come primo esempio, calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside:

$$H(t) := \chi_{\mathbb{R}^+}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Osserviamo innanzitutto che e^{-st} risulta sommabile in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $Re(s) > 0$. Infatti, per $s \neq 0$ abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} - \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-st}}{s}.$$

Osserviamo allora che il limite

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st}$$

esiste finito se e solo se $Re(s) > 0$ ed in tal caso risulta nullo. Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-Re(s)t} = \begin{cases} 0 & \text{se } Re(s) > 0 \\ +\infty & \text{se } Re(s) < 0 \\ 1 & \text{se } Re(s) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che se $Im(s) \neq 0$, allora $e^{-st} = e^{-Re(s)t}(\cos(Im(s)t) - \sin(Im(s)t)$ ammette limite se e solo se $Re(s) > 0$. Otteniamo allora che $S(H) = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) > 0\}$ e $\rho(H) = 0$ e che per $s \in S(H)$ da quanto sopra risulta

$$\Lambda(H)(s) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}.$$

Vediamo ora di calcolare la trasformata di Laplace della funzione esponenziale e^{at}, $a \in \mathbb{C}$. Per quanto già osservato nel precedente esempio, la funzione $e^{at}e^{-st} = e^{-(s-a)t}$ risulta sommabile in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $Re(s-a) > 0$ ovvero se e solo se $Re(s) > Re(\alpha)$. Avremo dunque che $S(e^{at}) = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) > Re(a)\}$ e che $\rho(e^{at}) = Re(a)$. Per $s > Re(a)$ abbiamo che la trasformata di Laplace di e^{at} risulta

$$\begin{aligned} \Lambda(e^{at})(s) &= \int_{[0,+\infty)} e^{at}e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\, dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a} - \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la trasformata di Laplace dell'*impulso* di durata $h > 0$:

$$f_h(t) := \chi_{[0,h)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,h), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

abbiamo che $f_h(t)e^{-st}$ risulta sommabile in $\mathbb{R}^+$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ (dunque $S(f_h) = \mathbb{C}$ e $\rho(f_h) = -\infty$) e che per $s \neq 0$ si ha

$$\Lambda(f_h)(s) = \int_0^h e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^h = \frac{1 - e^{-hs}}{s}$$

mentre $\Lambda(f_h)(0) = h$.

Vale il seguente risultato

TEOREMA 8.1. *Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\rho(f)$. Allora per ogni $p_0 > \rho(f)$, $\Lambda(f)$ risulta limitata nel semipiano $S_0 = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) \geq p_0\}$ ed inoltre*

$$\lim_{Re(s)\to+\infty} \Lambda(f)(s) = 0.$$

DIM. Per $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) \geq p_0$ risulta

$$|\Lambda(f)(s)| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)e^{-st}|\, dt = \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|e^{-Re(s)t}\, dt \leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|e^{-p_0 t}\, dt$$

ed essendo $p_0 > \rho(f)$ si ha che $\int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|e^{p_0 t}\, dt = C_0 \in \mathbb{R}$. Ne segue allora che per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) \geq p_0$ risulta $|\Lambda(f)(s)| \leq C_0$.
Per provare che $\Lambda(f)(s) \to 0$ per $Re(s) \to +\infty$, consideriamo una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $Re(s_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e poniamo $f_n(t) = f(t)e^{-s_n t}$. Fissato $p_0 > \rho(f)$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $Re(s_n) \geq p_0$ per ogni $n \geq \nu$. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e ogni $n \geq \nu$ si ha

$$|f_n(t)| = |f(t)e^{-s_n t}| = |f(t)|e^{-Re(s_n)t} \leq |f(t)|e^{-p_0 t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+).$$

Inoltre, essendo per ogni $t > 0$ $e^{-Re(s_n)t} \to 0$ per $n \to +\infty$, ne segue che per q.o. $t \in \mathbb{R}^+$ risulta $f_n(t) = f(t)e^{-s_n t} \to 0$ per $n \to +\infty$. Dal Teorema di convergenza dominata concludiamo che

$$\Lambda(f)(s_n) = \int_{\mathbb{R}^+} f_n(t)\, dt \to 0, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

□

Non è in generale vero che $\Lambda(f)(s) \to 0$ per $|s| \to +\infty$. Ad esempio per l'impulso di durata 1 si ha che

$$\Lambda(\chi_{[0,1)})(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \to +\infty \quad \text{per } s \in \mathbb{R},\ s \to -\infty.$$

Il prossimo risultato prova che la trasformata di Laplace risulta olomorfa (e dunque continua) nel suo dominio. Vale infatti

TEOREMA 8.2. (OLOMORFIA DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE)
Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\rho(f)$. Allora $\Lambda(f)(s)$ risulta olomorfa nel semipiano $Re(s) > \rho(f)$. Precisamente, la funzione $g(t) = tf(t)$ risulta $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\rho(g) = \rho(f)$ e vale

$$\Lambda(f)'(s) = -\Lambda(g)(s), \quad \forall s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \rho(f),$$

ovvero

$$\frac{d}{ds}\int_{[0,+\infty)} f(t)e^{-st}\, dt = -\int_{[0,+\infty)} tf(t)e^{-st}\, dt, \quad \forall s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \rho(f).$$

DIM. Proviamo innanzitutto che la funzione $g(t) = tf(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile con $\rho(g) = \rho(f)$. Infatti, se $Re(s) > \rho(f)$, siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $Re(s) > a > b > \rho(f)$. Essendo $a > b$, si ha che $te^{-at} = o(e^{-bt})$ per $t \to +\infty$, e dunque che esiste $C > 0$ tale che $te^{-at} < Ce^{-tb}$ per ogni $t > 0$. Allora essendo $Re(s) > a$ e $b > \rho(f)$, risulta

$$|g(t)e^{-st}| = |tf(t)e^{-st}| \leq |f(t)|te^{-at} \leq C|f(t)|e^{-bt} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+) \quad \forall t > 0.$$

Quindi g è $\mathcal{L}$-trasformabile con $\rho(f) \geq \rho(g)$. La diseguaglianza opposta è immediata essendo $|f(t)e^{-st}| < |tf(t)e^{-st}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ per ogni $t > 1$ e $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \rho(g)$.
Per concludere la dimostrazione è sufficiente applicare il Teorema sulla derivabilità dell'integrale dipendente da un parametro. Infatti la funzione $h(s,t) = f(t)e^{-st}$ risulta derivabile rispetto ad s con

$$\frac{\partial}{\partial s}h(s,t) = -tf(t)e^{-st}, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Fissato $b > \rho(f)$, procedendo come sopra, si ottiene che per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > b$ esiste $C > 0$ (indipendente da s) tale che risulta

$$|\frac{\partial}{\partial s}h(s,t)| = |tf(t)e^{-st}| \leq C|f(t)|e^{-bt} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+) \quad \forall t > 0.$$

Ne segue allora che

$$\Lambda(f)(s) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)e^{-st}\,dt$$

risulta derivabile in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > b$ e

$$\Lambda(f)'(s) = \frac{d}{ds}\int_{[0,+\infty)} f(t)e^{-st}\,dt = -\int_{[0,+\infty)} tf(t)e^{-st}\,dt.$$

Essendo $b > \rho(f)$ arbitrario si ottiene la tesi. □

Dai risultati sulle funzioni olomorfe abbiamo allora che $\Lambda(f)(s)$ risulta di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel semipiano $Re(s) > \rho(f)$ ed applicando iterativamente il precedente risultato otteniamo che $\rho(t^{(m)}f(t)) = \rho(f)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e

$$\Lambda(f)^{(m)}(s) = (-1)^m\Lambda(t^m f(t))(s), \quad s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \rho(f).$$

Ad esempio, ricordando che $\Lambda(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ per $Re(s) > Re(a)$ otteniamo che per tali valori risulta

$$\Lambda(te^{at}) = -\Lambda(e^{at})'(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

e più in generale che

$$\Lambda(t^m e^{at}) = (-1)^m\Lambda(e^{at})^{(m)}(s) = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

Infine, ricordando che la trasformata della funzione di Heaviside $H(t)$ è $\Lambda(H)(s) = \frac{1}{s}$, per ogni $Re(s) > 0$, e che

$$\Lambda(H)^{(n)}(s) = (-1)^n\frac{n!}{s^{n+1}},$$

posto

$$P_n(t) = t^n H(t) = \begin{cases} t^n & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

risulta

$$\Lambda(P_n)(s) = (-1)^n\Lambda(H)^{(n)}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = \Lambda(H_n)(1) = n!$$

Osservato che il precedente integrale risulta convergente anche se consideriamo potenze t^x con $x > -1$, per ogni $x > 0$ risulta definita la funzione

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad \forall x > 0$$

detta funzione gamma di Eulero e da quanto sopra osservato risulta $\Gamma(n+1) = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Abbiamo inoltre

Teorema 8.3. (Trasformata di Laplace di funzioni periodiche) *Sia $f(t)$ funzione periodica per $t \geq 0$ di periodo $T > 0$. Se $f(t)$ risulta sommabile in $[0, T]$ allora f risulta $\mathcal{L}$-trasformabile e per $Re(s) > 0$ risulta*

$$\Lambda(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-st}} \int_{[0,T]} f(t) e^{-st}\, dt.$$

Dim. Dall'additività dell'integrale abbiamo

$$\Lambda(f)(s) = \int_{[0,+\infty)} f(t) e^{-st}\, dt = \sum_{k \geq 0} \int_{[kT,(k+1)T]} f(t) e^{-st}\, dt$$

ed operando la sostituzione $\tau = t - kT$ in ciascuno degli integrali, essendo $f(t)$ periodica di periodo T ne segue

$$\Lambda(f)(s) = \sum_{k \geq 0} \int_{[0,T]} f(\tau) e^{-s\tau - ksT}\, d\tau = \sum_{k \geq 0} e^{-ksT} \int_{[0,T]} f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau.$$

La serie $\sum_{k \geq 0} e^{-ksT}$ è serie geometrica di ragione e^{-sT} e risulta convergente se e solo se $|e^{-sT}| = e^{-Re(s)T} < 1$ ovvero se e solo se $Re(s) > 0$. Quindi, se $Re(s) > 0$ otteniamo

$$\Lambda(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_{[0,T]} f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau.$$

□

Ad esempio, consideriamo l'onda quadra

$$q(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [2n, 2n+1],\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo che $f(t)$ risulta periodica di periodo 2 e dal precedente risultato abbiamo

$$\begin{aligned} \Lambda(q)(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_{[0,2]} q(t) e^{-st}\, dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_{[0,1]} e^{-st}\, dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^1 = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{1 - e^{-s}}{s} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \end{aligned}$$

2. Proprietà elementari

Si ha immediatamente che se $\alpha \in \mathbb{C}$ e f è $\mathcal{L}$-trasformabile allora

$$\Lambda(\alpha f)(s) = \alpha \Lambda(f)(s), \quad \forall s \in S(f).$$

Ad esempio, consideriamo l'*impulso unitario* di durata h:

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h}\chi_{[0,h)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } t \in [0,h), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ricordando che la trasformata di Laplace dell'impulso di durata h, $\chi_{[0,h)}$, è

$$\Lambda(\chi_{[0,h)})(s) = \begin{cases} \frac{1-e^{-hs}}{s} & \text{se } s \neq 0, \\ h & \text{se } s = 0, \end{cases}$$

da quanto sopra otteniamo

$$\Lambda(\delta_h)(s) = \frac{1}{h}\Lambda(\chi_{[0,h)})(s) = \begin{cases} \frac{1-e^{-hs}}{hs} & \text{se } s \neq 0, \\ 1 & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Osserviamo ora che per ogni $s \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \Lambda(\delta_h)(s) = \int_{\mathbb{R}} \delta_h(t) e^{-st}\, dt = 1$$

mentre

$$\lim_{h\to 0} \delta_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0, \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Si può provare che per ogni funzione $\varphi(t)$ continua in $\mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_h(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

L'operatore $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0)$ viene detto delta di Dirac. Si può dimostrare che non esiste alcuna funzione $\delta(t)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

Viene comunque impropriamente indicata con $\delta(t)$ la delta di Dirac e si pone

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\varphi(t)\, dt := \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_h(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

La delta di Dirac e i precedenti concetti possono essere formalizzati nell'ambito della teoria delle distribuzioni.

Si ha inoltre che l'applicazione Λ è lineare e precisamente vale il seguente risultato

Proposizione 8.1. *Se f e g sono $\mathcal{L}$-trasformabili, con ascissa di convergenza rispettivamente $\rho(f)$ e $\rho(g)$, allora $f+g$ risulta $\mathcal{L}$-trasformabile con $\rho(f+g) = \max\{\rho(f); \rho(g)\}$ e vale*

$$\Lambda(f+g)(s) = \Lambda(f)(s) + \Lambda(g)(s), \quad \forall s > \rho(f+g).$$

Dim. La dimostrazione segue dalla linearità dell'integrale una volta osservato che $S(f)\cap S(g) = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) \geq \rho(f) \text{ e } Re(s) \geq \rho(g)\} = \{s \in \mathbb{C} \,|\, Re(s) \geq \max\{\rho(f), \rho(g)\}\}$. dove le precedenti diseguaglianze possono essere strette. □

Ad esempio, ricordando che $\Lambda(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$ per $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > Re(a)$, otteniamo che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > 0$ risulta

$$\Lambda(e^{i\omega t})(s) = \frac{1}{s - i\omega} \quad \text{e} \quad \Lambda(e^{-i\omega t})(s) = \frac{1}{s + i\omega}$$

da cui, essendo $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$ e $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}$ otteniamo

$$\Lambda(\cos(\omega t))(s) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad Re(s) > 0,$$

mentre

$$\Lambda(\sin(\omega t))(s) = \frac{1}{2i}(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad Re(s) > 0.$$

In particolare si ha

$$\Lambda(\cos t)(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{e} \quad \Lambda(\sin t)(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad Re(s) > 0.$$

Dal Teorema sull'olomorfia della trasformata, per $Re(s) > 0$ otteniamo allora che

$$\Lambda(t \sin(\omega t)) = -\Lambda(\sin(\omega t))'(s) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

mentre

$$\Lambda(t \cos(\omega t)) = -\Lambda(\cos(\omega t))'(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Analogalmente, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \omega$ risulta

$$\Lambda(e^{\omega t})(s) = \frac{1}{s - \omega} \quad \text{e} \quad \Lambda(e^{-\omega t})(s) = \frac{1}{s + \omega}$$

da cui, ricordando che $\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$ e $\sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$, $\omega \in \mathbb{R}$ otteniamo che per $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \omega$ risulta

$$\Lambda(\cosh(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2 - \omega^2} \quad \text{e} \quad \Lambda(\sinh(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.$$

Riguardo al comportamento della trasformata rispetto a traslazioni e omotetie, come nel caso della trasformata di Fourier abbiamo

Proposizione 8.2. *Se f è funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\rho(f)$, allora*

(i) $\Lambda(f(at))(s) = \frac{1}{a}\Lambda(f(t))(\frac{s}{a})$ *per ogni $a > 0$ e $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > a\rho(f)$;*
(ii) $\Lambda(f(t-a))(s) = e^{-as}\Lambda(f(t))(s)$ *per ogni $a > 0$ e $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \rho(f)$;*
(iii) $\Lambda(e^{at}f(t))(s) = \Lambda(f)(s - a)$ *per ogni $a \in \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \rho(f) + Re(a)$.*

Dim. Possiamo provare (i) operando la sostituzione $\tau = at$, ottenendo

$$\Lambda(f(at))(s) = \int_{[0,+\infty)} f(at)e^{-st}\,dt = \frac{1}{a}\int_{[0,+\infty)} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}\Lambda(f)(\frac{s}{a}),$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(\frac{s}{a}) = \frac{Re(s)}{a} > \rho(f)$.
Per provare (ii), osserviamo che essendo $f(t) = 0$ per $t < 0$, avremo che $f(t-a) = 0$ per $t < a$. Posto allora $\tau = t - a$ otteniamo

$$\Lambda(f(t-a))(s) = \int_{[0,+\infty)} f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_{[0,+\infty)} f(\tau)e^{-s\tau - sa}\,d\tau = e^{-as}\Lambda(f)(s),$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \rho(f)$.
Infine, per provare (iii) abbiamo

$$\Lambda(e^{at}f(t))(s) = \int_{[0,+\infty)} f(t)e^{-st+at}\,dt = \int_{[0,+\infty)} f(t)e^{-(s-a)t}\,dt = \Lambda(f)(s-a),$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s-a) > \rho(f)$.

Ad esempio, da (iii) con $a = \pm i\omega$, essendo $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2}$ e $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$, otteniamo che per ogni funzione f $\mathcal{L}$-trasformabile e ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \rho(f)$ risulta

$$\Lambda(f(t)\cos(\omega t))(s) = \frac{1}{2}(\Lambda(f)(s - i\omega) + \Lambda(f)(s + i\omega))$$

e

$$\Lambda(f(t)\sin(\omega t))(s) = \frac{1}{2i}(\Lambda(f)(s - i\omega) - \Lambda(f)(s + i\omega)).$$

Da (iii) otteniamo inoltre che per $Re(s) > Re(a)$

$$\Lambda(e^{at}\sin(\omega t))(s) = \Lambda(\sin(\omega t))(s-a) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

e

$$\Lambda(e^{at}\cos(\omega t))(s) = \Lambda(\cos(\omega t))(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

In particolare, dalla prima ne segue che se $c - \frac{b^2}{4} > 0$ e $Re(s) > -\frac{b}{2}$ allora

$$\frac{1}{s^2 + bs + c} = \frac{1}{(s + \frac{b}{2})^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega}\Lambda(\sin(\omega t))(s + \frac{b}{2}) = \frac{1}{\omega}\Lambda(e^{-\frac{b}{2}t}\sin(\omega t))(s)$$

dove abbiamo posto $\omega^2 = c - \frac{b^2}{4}$.

Abbiamo inoltre

Teorema 8.4. (Trasformata di Laplace della convoluzione)
Siano f e g funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili nulle per $t < 0$, allora $f * g$ è $\mathcal{L}$-trasformabile con $\rho(f * g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$ e per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$ risulta

$$\Lambda(f * g)(s) = \Lambda(f)(s)\Lambda(g)(s).$$

Dim. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^+} f*g(t)e^{-st}\,dt = \int_{\mathbb{R}^+}(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\,dt)e^{-st}\,dt = \int_{\mathbb{R}^+}(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)e^{-s\theta}\,d\theta)e^{-s(t-\theta)}\,dt.$$

Osserviamo allora che

$$I = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^+} |f(t-\theta)e^{-s(t-\theta)}|\,dt)|g(\theta)e^{-s\theta}|\,d\theta = \int_{\mathbb{R}^+}(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-Re(s)(t-\theta)}|f(t-\theta)|\,d\theta)|g(\theta)|e^{-Re(s)\theta}\,d\theta$$

Posto $\tau = t-\theta$, per $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\rho(f);\rho(g)\}$, risulta allora

$$I = \int_{\mathbb{R}^+}(\int_{\mathbb{R}^+} |f(\tau)|e^{-Re(s)\tau}\,d\tau)|g(\theta)|e^{-Re(s)\theta}\,d\theta = \int_{\mathbb{R}^+}|f(\tau)|e^{-Re(s)\tau}\,d\tau \int_{\mathbb{R}^+}|g(\theta)|e^{-Re(s)\theta}\,d\theta < +\infty$$

Dal Teorema di Tonelli segue allora che $h(t,\theta) = f(t-\theta)g(\theta)e^{-st}$ risulta sommabile in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ne segue allora $f*g(t)e^{-st} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ per ogni $Re(s) > \max\{\rho(f);\rho(g)\}$ e per tali valori si ha

$$\begin{aligned}\Lambda(f*g)(s) &= \int_{\mathbb{R}^+}(\int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)e^{-s\theta}\,d\theta)e^{-s(t-\theta)}\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}(\int_{\mathbb{R}^+} f(t-\theta)e^{-s(t-\theta)}\,dt)g(\theta)e^{-s\theta}\,d\theta\\ &= \int_{\mathbb{R}^+} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \int_{\mathbb{R}^+} g(\theta)e^{-s\theta}\,d\theta = \Lambda(f)(s)\Lambda(g)(s).\end{aligned}$$

□

Vediamo infine di determinare la trasformata della derivata, risultato che sarà particolarmente utile per le applicazioni alla risoluzione di equazioni differenziali:

Teorema 8.5. (Trasformata di Laplace della derivata)
Sia $f(t)$ funzione continua e $\mathcal{C}^1$ a tratti in $\mathbb{R}^+$ con $f'(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora $f(t)$ risulta $\mathcal{L}$-trasformabile con $\rho(f) \le \max\{\rho(f'),0\}$ e per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\rho(f');0\}$ risulta

$$\Lambda(f')(s) = s\Lambda(f)(s) - f(0^+).$$

dove $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$.

Dim. Osserviamo che dal Teorema fondamentale del calcolo per ogni $t > 0$ risulta

$$f(t) = f(0^+) + \int_0^t f'(\theta)\,d\theta.$$

Inoltre, essendo $f(t) = 0$ per $t < 0$ e ricordando che $H(t) = \chi_{\mathbb{R}^+}(t0$, otteniamo

$$(H*f')(t) = \int_{\mathbb{R}} H(t-\theta)f'(\theta)\,d\theta = \int_0^t f'(\theta)\,d\theta$$

Ne segue allora che per $t \ge 0$ risulta

$$f(t) = f(0^+)H(t) + (H*f')(t)$$

Dal Teorema sulla trasformata del prodotto di convoluzione otteniamo allora che f risulta $\mathcal{L}$-trasformabile con $\rho(f) \ge \max\{\rho(H);\rho(f')\} = \max\{0,\rho(f')\}$ e che vale

$$\Lambda(f)(s) = f(0^+)\Lambda(H)(s) + \Lambda(H)(s)\Lambda(f')(s).$$

Essendo $\Lambda(H)(s) = \frac{1}{s}$ per ogni $Re(s) > 0$, ne segue che

$$s\Lambda(f)(s) = f(0^+) + \Lambda(f')(s), \quad \forall s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \max\{0,\rho(f')\}.$$

□

Iterando il precedente risultato si ottiene che se $f(t)$ risulta di classe $\mathcal{C}^m$ in $\mathbb{R}^+$, nulla per $t < 0$ con $f^{(m)}$ $\mathcal{L}$-trasformabile, allora $f^{(k)}$ risulta $\mathcal{L}$-trasformabile per ogni $k = 0, ..., m-1$ e vale

$$\begin{aligned}\Lambda(f^{(m)})(s) &= s^m\Lambda(f)(s) - s^{m-1}f(0^+) - s^{m-2}f'(0^+) - ... - f^{(m-1)}(0^+)\\ &= s^m\Lambda(f)(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{(m-k-1)}(0^+)\end{aligned}$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > \max\{\rho(f^{(m)}); 0\}$.

Osserviamo inoltre che dal precedente risultato, ricordando che $\Lambda(g)(s) \to 0$ per $Re(s) \to +\infty$ per ogni g $\mathcal{L}$-trasformabile, si ottiene che nelle precedenti ipotesi risulta

$$\lim_{Re(s)\to+\infty} s\Lambda(f)(s) = f(0^+).$$

Tale risultato prende il nome di *Teorema del valore iniziale*. Si può inoltre provare che se esiste finito $f(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t)$, allora

$$\lim_{s\to 0,\, Re(s)>0} s\Lambda(f)(s) = f(+\infty),$$

vale cioè il *Teorema del valore finale*.

Tabella 1. Proprietà della Trasformata di Laplace

$\Lambda(f)^{(m)}(s) = (-1)^m\Lambda(t^m f(t))(s)$	$Re(s) > \rho(f)$
$\Lambda(\alpha f + \beta g)(s) = \Lambda(f)(s) + \beta\Lambda(g)(s)$	$Re(s) \geq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$\Lambda(f(at))(s) = \frac{1}{a}\Lambda(f)(\frac{s}{a})$	$Re(s) > a\rho(f)$, $a > 0$
$\Lambda(f(t-a)) = e^{-sa}\Lambda(f)(s)$	$Re(s) > \rho(f)$, $a > 0$
$\Lambda(e^{at}f(t))(s) = \Lambda(f)(s-a)$	$Re(s) > \rho(f) + Re(a)$, $a \in \mathbb{C}$
$\Lambda(\cos(\omega t)f(t))(\nu) = \frac{1}{2}(\Lambda(f)(s-i\omega) + \Lambda(f)(s+i\omega))$	$Re(s) > \rho(f)$, $a \in \mathbb{R}$
$\Lambda(\sin(\omega t)f(t))(\nu) = \frac{1}{2i}(\Lambda(f)(\nu-i\omega) - \Lambda(f)(\nu+i\omega))$	$Re(s) > \rho(f)$, $a \in \mathbb{R}$
$\Lambda(f * g)(s) = \Lambda(f)(s)\Lambda(g)(s)$	$Re(s) > \max\{\rho(f); \rho(g)\}$
$\Lambda(f^{(m)})(\nu) = s^m\Lambda(f)(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{(m-k-1)}(0^+)$	$Re(s) > \max\{\rho(f^{(m)}); 0\}$

3. Confronto con la Trasformata di Fourier e Formula di Inversione

Ricordiamo che data $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ abbiamo denotato con

$$\Phi(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

la sua trasformata di Fourier. Supposta $f(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa di convergenza $\rho(f)$, per $\alpha > \rho(f)$ poniamo

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\alpha t} & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Risulta allora che $g_\alpha(t)$ è sommabile in $\mathbb{R}$ e per ogni $\alpha > \rho(f)$ e $\nu \in \mathbb{R}$ si ha

$$\Phi(g_\alpha)(\nu) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-\alpha t} e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}^+} f(t) e^{-(\alpha + 2\pi i \nu)t}\, dt = \Lambda(f)(\alpha + 2\pi i \nu).$$

Ricordiamo ora che per la formula di inversione della trasformata di Fourier, se $\Phi(g_\alpha) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora $g_\alpha \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e

$$g_\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(g_\alpha)(\nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ovvero, per $t > 0$, risulta

$$f(t) e^{-\alpha t} = \int_{\mathbb{R}} \Lambda(f)(\alpha + 2\pi i \nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu$$

da cui, moltiplicando entrambi i membri per $e^{\alpha t}$ e ponendo $\omega = 2\pi\nu$ si deduce

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \Lambda(f)(\alpha + 2\pi i \nu) e^{(\alpha + 2\pi i \nu)t}\, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Lambda(f)(\alpha + i\omega) e^{(\alpha + i\omega)t}\, d\omega.$$

Si ha allora

Teorema 8.6. (Formula di inversione)
Sia $f(t)$ funzione $\mathcal{L}$-trasformabile (nulla per $t < 0$) con ascissa di convergenza $\rho(f)$. Se per $\alpha > \rho(f)$ si ha che $\Lambda(f)(\alpha + i\omega)$ risulta sommabile rispetto a ω in $\mathbb{R}$, allora $f(t)$ è continua e

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Lambda(f)(\alpha + i\omega) e^{(\alpha + i\omega)t}\, d\omega, \quad \forall t \geq 0.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione $\sin t$. Abbiamo visto che per ogni $\alpha > 0$ risulta

$$\Lambda(\sin t)(\alpha + i\omega) = \frac{1}{1 + (\alpha + i\omega)^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 - \omega^2 + 2\alpha\omega} \sim -\frac{1}{\omega^2}, \quad \omega \to \pm\infty.$$

Dunque $\Lambda(\sin t)(\alpha + i\omega)$ risulta sommabile rispetto a ω in $\mathbb{R}$ e dalla formula di inversione

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\alpha + i\omega)t}}{1 + (\alpha + i\omega)^2}\, d\omega, \quad \forall t \geq 0, \forall \alpha > 0.$$

Osserviamo però che la condizione $\Lambda(f)(\alpha+i\omega)$ sommabile rispetto a ω in $\mathbb{R}$ non è invece verificata dalla trasformata di Laplace di $\cos(t)$,

$$\Lambda(\cos t)(s) = \frac{s}{1+s^2}.$$

Vale però il seguente risultato, che fornisce un analogo del Teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier.

Teorema 8.7.
Se $f(t)$ è funzione $\mathcal{C}^1$ a tratti in $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{L}$-trasformabile allora per ogni $\alpha > \rho(f)$ risulta

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(f)(\alpha+i\omega) e^{(\alpha+i\omega)t}\, d\omega, \quad \forall t \geq 0.$$

Quindi ad esempio otteniamo che per ogni $\alpha > 0$ e $t \geq 0$ risulta

$$\cos t = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha+i\omega}{1+(\alpha+i\omega)^2} e^{(\alpha+i\omega)t}\, d\omega.$$

Vediamo ora come esempio di determinare, se esiste, la funzione $f(t)$ per la quale

$$\Lambda(f)(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}.$$

Osservato che $\Lambda(f)(s)$ risulta sommabile in $\mathbb{R}$ rispetto alla parte immaginaria di s, dalla formula di inversione abbiamo che

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\alpha+i\omega)t}}{(\alpha+i\omega)^2((\alpha+i\omega)^2+1)}\, d\omega, \quad t \geq 0.$$

Scelto $\alpha = 1$ (ma potremo scegliere un qualunque $\alpha > 0$) e posto

$$g(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+1)}$$

otteniamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(1+i\omega)t}}{(1+i\omega)^2((1+i\omega)^2+1)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(1+i\omega) d\omega, \quad t \geq 0.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale utilizzando il metodo dei residui. La funzione $g(z)$ risulta olomorfa in $\mathbb{C}$ eccetto che nei poli $z_0 = 0$ e $z_\pm = \pm i$. Preso $R > 1$, consideriamo la curva Γ_R frontiera positivamente orientata del domino $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < R,\, Re(z) \leq 1\}$. Dal Teorema dei residui abbiamo allora che per ogni $R > 1$ risulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} g(z)\, dz = \mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Res}(g,i) + \mathrm{Res}(g,-i).$$

Essendo

$$\mathrm{Res}(g,0) = \lim_{z\to 0} D(z^2 g(z)) = \lim_{z\to 0} D(\frac{e^{zt}}{z^2+1}) = \lim_{z\to 0} \frac{te^{zt}(1+z^2) - e^{zt}2z}{(z^2+1)^2} = t$$

mentre

$$\mathrm{Res}(g, \pm i) = \frac{e^{zt}}{2z(z^2+1)+2z^3}\bigg|_{z=\pm i} = \frac{\pm i e^{\pm it}}{2}$$

otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = t + \frac{ie^{it}}{2} + \frac{-ie^{-it}}{2} = t - \sin t, \quad \forall R > 1.$$

Osserviamo ora che $\Gamma_R = [1-iR, 1+iR] \cup \gamma_R$ dove $\gamma_R(\theta) = 1 + Re^{i\theta}$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Abbiamo che

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0.$$

Infatti osserviamo che essendo $t \geq 0$ e $Re(z) \leq 1$ per ogni $s \in \gamma_R$, otteniamo che $|e^{zt}| = e^{\mathrm{Re}\,(z)t} \leq e^t$ per ogni $z \in \gamma_R$. Allora, poichè $|z| \geq |z-1|-1 = R-1$ e $|z^2+1| \geq |z|^2-1 \geq (R-1)^2-1$ per ogni $z \in \gamma_R$, otteniamo

$$|g(z)| \leq \frac{e^t}{(R-1)^2((R-1)^2-1)}, \quad z \in \gamma_R$$

e dunque

$$|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz| \leq \frac{e^t}{(R-1)^2((R-1)^2-1)}\int_{\gamma_R} dz \leq \frac{2\pi R e^t}{(R-1)^2((R-1)^2-1)} \to 0, \quad \text{per } R \to +\infty.$$

Inoltre, essendo $\gamma(\omega) = 1 + i\omega$ con $\omega \in [-R, R]$ una parametrizzazione del segmento $[1-iR, 1+iR]$, si ha che

$$\int_{[1-iR,1+iR]} g(z)\,dz = i\int_{-R}^{R} g(1+i\omega)\,d\omega.$$

Ne concludiamo allora che per $t \geq 0$ risulta

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(1+i\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} g(1+i\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to+\infty}\int_{[1-iR,1+iR]} g(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = t - \sin t. \end{aligned}$$

Dalla formula di inversione segue in particolare che *la trasformata di Laplace risulta iniettiva.* Infatti se $f(t)$ e $g(t)$ risultano $\mathcal{L}$-trasformabili con $\Lambda(f)(s) = \Lambda(g)(s)$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,(s) > \max\{\rho(f); \rho(g)\}$, allora $f - g$ risulta $\mathcal{L}$-trasformabile con $\Lambda(f-g)(s) = 0$ per ogni $\mathrm{Re}\,(s) > \max\{\rho(f); \rho(g)\}$. In particolare $\Lambda(f-g)(\alpha + i\omega)$ risulta sommabile rispetto a ω in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha > \max\{\rho(f); \rho(g)\}$ e dalla formula di inversione si ottiene che $f(t) = g(t)$ per ogni $t \geq 0$.

Utilizzando l'iniettività della trasformata e le proprietà elementari, deduciamo nuovamente la funzione $f(t)$ per la quale risulta

$$\Lambda(f)(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}.$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2}$$

e che per $Re(s) > 0$ abbiamo

$$\frac{1}{s^2} = \Lambda(t)(s) \quad \text{e} \quad \frac{1}{1+s^2} = \Lambda(\sin t)(s)$$

Ne segue allora che

$$\Lambda(f)(s) = \Lambda(t - \sin t)(s)$$

e dunque, dall'iniettività della trasformata, che per $t \geq 0$ risulta $f(t) = t - \sin t$.

Tabella 2. Alcune Trasformate di Laplace

$f(t)$ per $t \geq 0$	$\Lambda(f)(s)$	$\rho(f)$
1	$\frac{1}{s}$	0
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$Re(a)$
$\chi_{[0,h)}(t)$	$\begin{cases} \frac{1-e^{-hs}}{s} & s \neq 0 \\ h & s = 0 \end{cases}$	$-\infty$
$\frac{1}{h}\chi_{[0,h)}(t)$	$\begin{cases} \frac{1-e^{-hs}}{hs} & s \neq 0 \\ 1 & s = 0 \end{cases}$	$-\infty$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	ω
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	ω
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Re(a)$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$Re(a)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$Re(a)$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	0
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	0

4. Risoluzione di equazioni differenziali lineari

Data un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 y + a_1 y' + ... + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_n y^{(n)} = f(t)$$

dove $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, ...n$, e $f(t)$ risulta $\mathcal{L}$-trasformabile, ne cerchiamo le soluzioni che risultino di classe $\mathcal{C}^m$ con derivate $\mathcal{L}$-trasformabili soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0^+) = y_0, \\ y'(0^+) = y_1, \\ .... \\ y^{(n-1)}(0^+) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri dell'equazione, dal Teorema sulla trasformata della derivata, otteniamo

$$\begin{aligned} &a_0 \Lambda(y)(s) + a_1(s\Lambda(y)(s) - y_0) + a_2(s^2\Lambda(y)(s) - sy_0 - y_1) \\ &\quad + ... + a_n(s^n \Lambda(y)(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - ... - s y_{n-2} - y_{n-1}) = \Lambda(f)(s) \end{aligned}$$

da cui

$$(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k)\Lambda(y)(s) = \Lambda(f)(s) + \sum_{k=1}^{n} a_k (\sum_{j=1}^{k} s^{k-j} y_{j-1}).$$

Detto allora $P(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$ il polinomio caratteristico dell'equazione e posto

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k (\sum_{j=1}^{k} s^{k-j} y_{j-1}),$$

osserviamo che $\varphi(s)$ risulta polinomio in s (dunque $\mathcal{L}$-trasformabile). Posto allora $F(s) = \Lambda(f)(s)$ otteniamo che

$$\Lambda(y)(s) = \frac{\varphi(s) + F(s)}{P(s)}.$$

Nota la trasformata $\Lambda(y)(s)$ dovremo risalire alla soluzione $y(t)$ utilizzando le proprietà elementari della trasformata oppure applicando la formula di inversione.

In alternativa, osserviamo che denotata con $\eta(t)$ la funzione, detta risolvente dell'equazione differenziale, per la quale

$$\Lambda(\eta)(s) = \frac{1}{P(s)},$$

abbiamo

$$\frac{\Lambda(f)(s)}{P(s)} = \Lambda(f)(s)\Lambda(\eta)(s) = \Lambda(f * \eta)(s) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t-\theta)\eta(\theta)\, d\theta.$$

Dunque se denotiamo con $g(t)$ la funzione avente per trasformata la funzione razionale $\frac{\varphi(s)}{P(s)}$, otteniamo

$$\Lambda(y)(s) = \Lambda(g)(s) + \Lambda(f * \eta)(s)$$

e quindi

$$y(t) = g(t) + (f * \eta)(t), \quad t \geq 0.$$

Come primo esempio consideriamo l'equazione differenziale omogenea

$$y'' - 2y' + y = 0$$

con il dato iniziale $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri dell'equazione otteniamo

$$s^2\Lambda(y)(s) - sy(0) - y'(0) - 2(s\Lambda(y)(s) - y(0)) + \Lambda(y)(s) = 0$$

da cui, utilizzando il dato iniziale,

$$\Lambda(y)(s) = \frac{s-2}{s^2 - 2s + 1}.$$

dove $P(s) = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$ è il polinomio caratteristico associato all'equazione. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}\frac{s-2}{s^2-2s+1} &= \frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \\ &= \Lambda(e^t)(s) + \Lambda(e^t)'(s) \\ &= \Lambda(e^t)(s) - \Lambda(te^t)(s) = \Lambda(e^t - te^t)(s).\end{aligned}$$

Otteniamo dunque che per $t \geq 0$ la soluzione del problema dato è

$$y(t) = e^t - te^t.$$

Consideriamo ora l'equazione non omogenea

$$y'' + 2y' + 2y = e^t$$

con i dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$. Applicando la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione otteniamo

$$s^2\Lambda(y)(s) - sy(0) - y'(0) + 2(s\Lambda(y)(s) - y(0)) + 2\Lambda(y)(s) = \Lambda(e^t)(s)$$

da cui, utilizzando il dato iniziale e ricordando che $\Lambda(e^t) = \frac{1}{s-1}$ si ricava

$$\Lambda(y)(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)} = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

dove $P(s) = s^2+2s+2$ è il polinomio caratteristico dell'equazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{(s-1)(s^2+2s+2)} &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1} + 2\frac{2s+1}{s^2+2s+2}\right)\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1} + 4\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{5}(\Lambda(e^t)(s) + 4\Lambda(e^{-t}\cos t)(s) - 2\Lambda(e^{-t}\sin t)(s))\end{aligned}$$

Dunque

$$y(t) = \frac{1}{5}(e^t + 4e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t) = \frac{e^{-t}}{5}(e^{2t} + 4\cos t - 2\sin t)$$

è la soluzione cercata in $\mathbb{R}^+$.

Consideriamo infine la seguente equazione del terzo ordine:

$$y''' - 8y = 24e^{2t}$$

con i dati iniziali $y''(0) = -4$, $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Applicando la trasformata di Laplace otteniamo

$$s^3\Lambda(y)(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 8\Lambda(y)(s) = 24\Lambda(e^{2t})(s)$$

da cui, essendo $\Lambda(e^{2t})(s) = \frac{1}{s-2}$ otteniamo

$$\Lambda(y)(s) = \frac{s^2-4}{s^3-8} + \frac{24}{(s-2)(s^3-8)}.$$

Abbiamo che $P(s) = s^3 - 8 = (s-2)(s^2+2s+4)$ e risulta

$$\Lambda(y)(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+4} + \frac{24}{(s-2)^2(s^2+2s+4)} = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} + 2\frac{s+2}{s^2+2s+4}$$

Osserviamo ora che

$$\frac{1}{(s-2)^2} = \Lambda(te^{2t})(s)$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{s+2}{s^2+2s+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+3} + \frac{1}{(s+1)^2+3}\\ &= \Lambda(e^{-t}\cos(\sqrt{3}t))(s) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda(e^{-t}\sin(\sqrt{3}t))(s)\end{aligned}$$

Otteniamo allora che

$$\Lambda(y)(s) = -\Lambda(e^{2t})(s) + 2\Lambda(te^{2t})(s) + 2\Lambda(e^{-t}\cos(\sqrt{3}t))(s) + \frac{2}{\sqrt{3}}\Lambda(e^{-t}\sin(\sqrt{3}t))(s)$$

e dunque che la soluzione cercata, per $t \geq 0$, è pari a

$$y(t) = (2t-1)e^{2t} + 2e^{-t}(\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)).$$